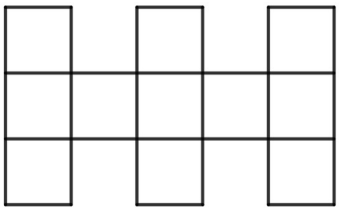
လမ်းလျောက်ထွက်ချဲလင့်

ပဟေဠိ (1)

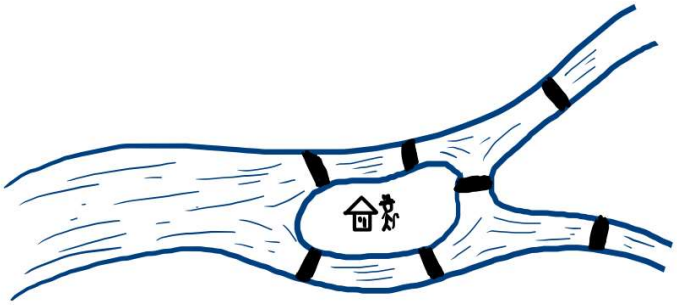
အောက်မှာပေးထားတဲ့ပုံကို စာရွက်တစ်ခုပေါ်မှာ ဘောပင်နဲ့ဆွဲရမှာပါ။ ကန့်သတ်ချက်အနေနဲ့ မျဉ်းတွေကို နှစ်ကြိမ်ပြန်ထပ်မဆွဲရပါဘူး။ ပြီးတော့ ဘောပင်ကို စာရွက်ပေါ်ကနေ တစ်ခေါက်ပဲကြွခွင့်ရှိပါတယ်။ စာရွက်ကို ခေါက်တာလိုမျိုး လူလည်မကျဘဲနဲ့ ရအောင်ဆွဲကြည့်ပါ။ အဖြေရှိပါတယ်။



ပုံ 1 - လက်မကြွစတမ်းချဲလင့်

ပဟေဠိ (2)

Jack ဆိုတဲ့လူတစ်ယောက်နေတဲ့ မြို့ကလေးဟာ မြစ်ဆုံမြစ်ခွတစ်ခုကို ဖြတ်လျက်တည်ထားပြီး မြစ်လယ်ကျွန်းတစ်ခု ပါဝင်ပါတယ်။ မြို့လေးရဲ့မြေပုံကိုတော့ ပုံမှာပေးထားပါတယ်။ မြို့ရဲ့ကုန်းမြေအစိတ်အပိုင်းတွေကို တံတားစုစုပေါင်း 7 စင်းနဲ့ချိတ်ဆက်ထားပါတယ်။ Jack ရဲ့နေအိမ်ကတော့ တံတားငါးစင်းဆုံရာ မြစ်လယ်ကျွန်းလေးပေါ်မှာပါ။ နံနက်ခင်းတစ်ခုမှာ Jack ဟာလမ်းထွက်လျောက်ဖို့ပြင်ဆင်နေရင်းနဲ့ ကိုယ့်ကိုယ်ကို ချဲလင့်လုပ်ဖို့ အိုင်ဒီယာတစ်ခု ရလိုက်ပါတယ်။ မြို့ရဲ့တံတားတွေအားလုံးကို အတိအကျတစ်ကြိမ်စီပဲ ဖြတ်ပြီးတော့ အဆုံးမှာသူ့အိမ်သူပြန်ရောက်အောင် မြို့ပတ်လမ်းလျောက်မယ့် challenge ပါ။ ဒါကြောင့် တံတားတိုင်းကိုဖြတ်ရမှာဖြစ်သလို တံတားတစ်ခုကိုတစ်ကြိမ်ထက် ပိုဖြတ်ခွင့်မရှိပါဘူး။ Jack က challenge ကိုမရမကအောင်နိုင်အောင်လုပ်နိုင်ခဲ့ပါတယ်။ ဒါပေမယ့် သူလူလည်ကျခဲ့ရတယ်။ တံတားတချို့ကိုနှစ်ကြိမ်မဖြတ်ချင်လို့ လှေစီးလိုက်တယ်တဲ့လေ။ ကဲ... စာဖတ်သူအနေနဲ့ Jack ရဲ့ challenge ကိုလှေမစီးဘဲ၊ မြို့ပြင်မထွက်ဘဲ အောင်မြင်အောင်လုပ်နိုင်သလား။ လှေစီးကိုစီးရမယ်ဆိုရင်ရော အနည်းဆုံးဘယ်နှကြိမ်စီးရမလဲ။

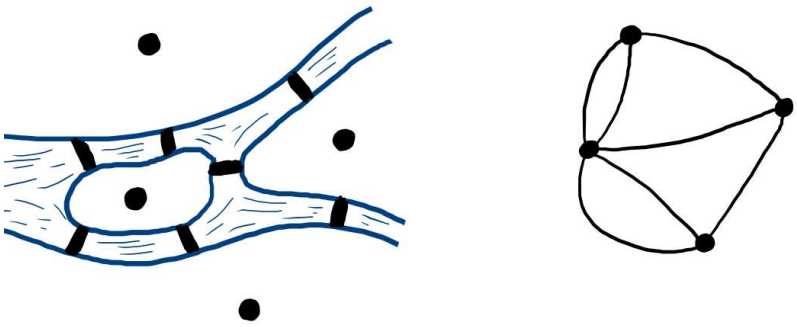


ပုံ 2 - လမ်းလျောက်ထွက်ချဲလင့်

နောက်ကွယ်က သင်္ချာ

Eulerian circuit နဲ့ trail များ

ပဟေဋ္ဌိ (2) ဟာ 18 ရာစုတုန်းက တကယ့်အပြင်မှာရှိခဲ့တဲ့ ပဟေဋ္ဌိပုစ္ဆာဖြစ်ပါတယ်။ ပဟေဋ္ဌိထဲက မြို့လေးကတော့ ပရပ်ရှားနိုင်ငံ (အခုတော့ ရုရှားရဲ့ အစိတ်အပိုင်း) ရဲ့ Konigsberg မြို့ဖြစ်ပါတယ်။ ဒီပုစ္ဆာကို ဒေသခံတွေက ဖြေရှင်းဖို့ အကြိမ်ကြိမ်ကြိုးစားခဲ့ကြပေမယ့် မအောင်မြင်ခဲ့ကြပါဘူး။ ရေထဲကနေ ဖြတ်ကူးပြီးဖြစ်စေ၊ မြို့အပြင်ထွက်ပြီးတော့ ဖြစ်စေ လူလည်ကျတဲ့သူတွေကလွဲရင်ပေါ့။ လူလည်မကျတဲ့အဖြေရှိမရှိဆိုတဲ့အချက်ကို အဲ့ဒီခေတ်ရဲ့ သျှမ်းသျှမ်းတောက် သင်္ချာပညာရှင် Leonhard Euler (လီယွန်ဟတ် အွိုင်လာ) က ဖြေရှင်းပေးနိုင်ခဲ့ပါတယ်။ အဖြေကတော့ အားလုံးထင်ထားတဲ့ အတိုင်း တကယ်မရှိတာပါ။ အဖြေမရှိရတဲ့ အကြောင်းရင်းကို ရှင်းရှင်းလင်းလင်းဖော်ထုတ်ပေးနိုင်ခဲ့တဲ့ Euler ရဲ့ စာတမ်းဟာ သင်္ချာလောကထဲက graph theory ဆိုတဲ့နယ်ပယ်ရဲ့ အစဖြစ်ခဲ့ပါတယ်။ Euler ရဲ့အဖြေကိုကြည့်ရအောင်။



ပုံ 3 – Euler ရဲ့ ရှင်းလင်းတဲ့အမြင်

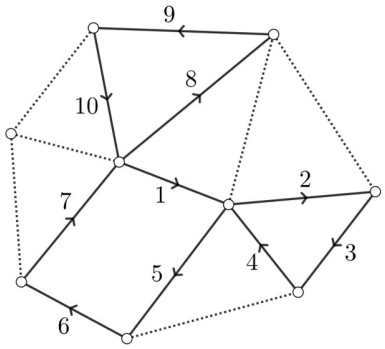
ပထမဆုံးသတိထားမိရမှာက ကုန်းမြေတစ်ခုချင်းစီပေါ်မှာ လမ်းဘယ်လိုလျောက်သလဲဆိုတာကို ဂရုစိုက်စရာ မလိုပါဘူး။ အရေးကြီးတာသည် ဘယ်တံတားပြီးရင် ဘယ်တံတားကိုဖြတ်မှာလဲဆိုတဲ့ တံတားတွေရဲ့ အစီအစဉ်ပဲဖြစ်ပါတယ်။ Euler ဟာ မလိုတာတွေကို မြင်ကွင်းကရှင်းသွားအောင်လို့ ကုန်းမြေလေးခုကို အစက်လေးစက်အဖြစ်လည်းကောင်း၊ ကုန်းမြေတွေကြားက တံတားတွေကို သက်ဆိုင်ရာအစက်တွေကိုဆက်ထားတဲ့ မျဉ်းကြောင်းတွေအဖြစ်လည်းကောင်း ပုံဖော်လိုက်ပါတယ်။ ဒီအခါ ပုံ 3 ရဲ့ ညာဘက်ပုံထဲကအတိုင်း သင်္ချာပစ္စည်းတစ်ခုရလာပါတယ်။

ဒီလိုမျိုး အစက်တွေရယ်၊ အစက်တွေကြားမှာဆက်ထားတဲ့ ဆက်သွယ်မှုပြမျဉ်းတွေရယ်သာပါတဲ့ ပုံကို graph လို့ခေါ်ပါတယ် (Coordinate ပြင်ညီပေါ်မှာဆွဲတဲ့ ဖန်ရှင်တွေရဲ့ graph နဲ့လားလားမျှမဆိုင်ပါ)။ အစက်တွေကို vertex

(အများကိန်း vertices) နဲ့ ဆက်သွယ်မှုပြမျဉ်းတွေကို edge (အများကိန်း edges) လို့ခေါ်ပါတယ်။ Vertex တစ်ခုကနေပြီး edge တစ်ကြောင်းကိုတစ်ကြိမ်ထက်ပိုမဖြတ်ဘဲနဲ့ စခဲ့တဲ့ vertex ဆီကိုပြန်ရောက်စေတဲ့ လမ်းကြောင်းတွေကို ပတ်လမ်း (circuit) လို့ခေါ်ပါတယ်။ ပတ်လမ်းထဲမှာ edge အကုန်ပါစရာမလိုပါ၊ နှစ်ကြိမ်ပြန်မဖြတ်ရင်ရပါပြီ။

ဒါဆိုရင် လမ်းလျောက်ထွက်တဲ့ချဲလင့်ကို graph ဘာသာစကားနဲ့ ပြန်ပြောကြည့်လို့ရင် - “ပေးထားတဲ့ graph မှာ edge အားလုံးပါဝင်နေတဲ့ ပတ်လမ်းရှိသလား၊ မရှိဘူးလား” ဆိုပြီးဖြစ်သွားပါတယ်။ Jack ရဲ့အိမ်က ဘယ်ကျွန်းမှာရှိရှိ မေးခွန်းရဲ့အဖြေက ပြောင်းမှာမဟုတ်ပါဘူး။ ဘာကြောင့်လဲတော့ ကိုယ့်ဘာသာစဉ်းစားကြည့်ပါ။

ချဲလင့်မှာအဖြေမရှိကြောင်းက ပတ်လမ်းတွေနဲ့ပက်သက်တဲ့ အရမ်းမြင်သာတဲ့အချက်ကလေးတစ်ခုအပေါ်မှာ မှီတည်နေပါတယ်။ ပုံ 4 က graph တစ်ခုပေါ်မှာရှိနေတဲ့ ပတ်လမ်းတစ်ခုရဲ့ပုံဖြစ်ပါတယ်။ ပတ်လမ်းထဲမပါတဲ့ edge တွေကို dotted segment တွေနဲ့ပြထားပါတယ်။

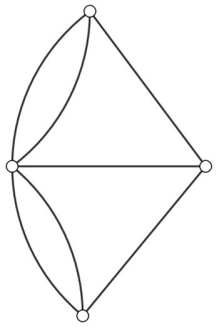


ပုံ 4 – Graph တစ်ခုပေါ်က ပတ်လမ်းတစ်ခု

ဒီပုံလေးကိုကြည့်ပြီး စိတ်ကူးယဉ်ကြည့်ပါ။ အဲ့ပတ်လမ်းအတိုင်း ခွေးတစ်ကောင်က လမ်းပတ်လျောက်နေတယ်။ စာဖတ်သူက ပတ်လမ်းထဲက vertex တစ်ခုပေါ်မှာထိုင်ပြီး အဲ့ဒီခွေးကို လိုက်ကြည့်နေတယ်။ ဒါဆိုရင်စာဖတ်သူဘာမြင်ရမလဲ။ ခွေးက စာဖတ်သူထိုင်နေတဲ့ vertex ထဲဝင်လာမယ်၊ ပြီးရင်ပြန်ထွက်သွားမယ်၊ ပြီးတော့ပြန်ဝင်လာမယ်၊ ပြီးရင်ပြန်ထွက်သွားမယ်... ဒီအတိုင်းတောက်လျောက်ပတ်နေမှာပါ။ ဒါကြောင့် စာဖတ်သူထိုင်နေတဲ့ vertex ကိုလာချိတ်တဲ့ edge တွေထဲကနေမှ ပတ်လမ်းထဲက edge တွေကို “ဝင်လာတဲ့ edge” တွေနဲ့ “ထွက်သွားတဲ့ edge” တွေဆိုပြီး အရေအတွက်တူညီတဲ့ အပုံနှစ်ပုံအဖြစ်ပုံလိုက်လို့ရပါမယ်။ တစ်နည်းအားဖြင့် အဲ့ဒီ edge အရေအတွက်ဟာ စုံကိန်းဖြစ်ပါတယ်။ ဒါဆိုရင် အောက်ပါသီအိုရမ်ကို ရပါပြီ။

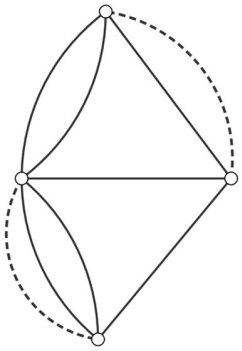
ပတ်လမ်းတစ်ခုပေါ်ရှိ မည်သည့် vertex အတွက်မဆို ယင်း vertex နှင့်လာရောက်ချိတ်ဆက်သည့် ပတ်လမ်းပေါ်ရှိ edge အရေအတွက်သည် စုံကိန်းဖြစ်သည်။

ဒါဆိုရင် ချဲလင့်ဘာလို့မဖြစ်နိုင်လဲ မြင်သာသွားပါပြီ။ အကယ်၍ အောက်ပါ graph (ပုံ 5) ထဲမှာ edge အားလုံးပါဝင်တဲ့ circuit ရှိခဲ့သော် graph ရဲ့မည်သည့် vertex အတွက်မဆို ယင်း vertex ကိုလာချိတ်တဲ့ edge အရေအတွက်သည် စုံကိန်းဖြစ်ရမှာ။ အခုက အကုန်လုံးစုံဖြစ်ဖို့နေနေသာသာ အကုန်လုံးက မကိန်းတွေချည်းဖြစ်နေတာဆိုတော့ ဝေလာဝေးပေါ့။



ပုံ 5 – လမ်းလျောက်ထွက်ချဲလင့်မှ ရလာသည့် graph

ဒါကြောင့် ချဲလင့်ကို ဖြေရှင်းဖို့ဖြစ်နိုင်အောင် တချို့ကျွန်းတွေကို လှေနဲ့ဖြတ်ကူးရမယ်။ လှေနဲ့ဖြတ်ကူးမယ့် ကျွန်းနှစ်ကျွန်းကို လည်းပဲ edge တစ်ကြောင်းနဲ့ဆက်ပါမယ်။ ထွက်လာတဲ့ graph မှာ vertex တိုင်းကို edge အရေအတွက် စုံဂဏန်း လာချိတ်အောင်လုပ်နိုင်တော့မှ ဖြေရှင်းနိုင်ဖို့အတွက် မျှော်လင့်ချက်ရှိမှာပါ။ ဒါကြောင့် လှေနဲ့ဖြတ်ကူးတဲ့အခါ အနည်းဆုံးနှစ်ကြိမ်တော့ ကူးကိုကူးရမှာပါ။ အောက်ကပုံမှာတော့ လှေနဲ့ကူးမယ့် edge တွေကို dashed segment တွေနဲ့ ပုံဖော်ထားပါတယ်။ ရလာတဲ့ပုံအသစ်မှာ edge အားလုံးပါဝင်တဲ့ ပတ်လမ်းရှာကြည့်ပါ။

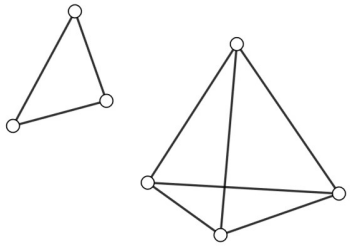


ပုံ 6 – လှေနဲ့နှစ်ကြိမ်ကူးမှ အဖြေရဖို့မျှော်လင့်ချက်ရှိမယ်

ပုံအသစ်မှာတော့ edge အားလုံးပါဝင်တဲ့ပတ်လမ်း တကယ်ရှိနေတာမို့လို့ ပဟေဠိ (2) ရဲ့အဖြေဟာ 2 ဖြစ်ပါတယ်။ ဒီပဟေဠိကို ဖြေရှင်းရင်းကနေပြီး edge အားလုံးပါဝင်တဲ့ ပတ်လမ်းမရှိတဲ့ graph အချို့ကိုစစ်ဆေးနိုင်တဲ့ နည်းလမ်းတစ်ခုကို ရရှိသွားပါတယ်။ Vertex တစ်ခုကို လာချိတ်ဆက်တဲ့ edge အရေအတွက်ကို အဲ့ဒီ vertex ရဲ့ degree လို့ခေါ်ပါမယ်။ ဒါဆိုရင်

Graph တစ်ခုမှာ edge အားလုံးပါဝင်တဲ့ ပတ်လမ်းရှိရင် vertex တိုင်းရဲ့ degree ဟာစုံကိန်းဖြစ်တယ်

ဆိုတဲ့သီအိုရမ်ကို ရရှိပါပြီ။ Euler ကတကယ့် ဉာဏ်ကြီးရှင်ပါ။ အပေါ်ကသီအိုရမ်ဟာ degree အားလုံးစုံမဟုတ်ရင် edge အားလုံးပါတဲ့ပတ်လမ်း မရှိဘူးလို့ပဲပြောတာပါ။ Degree အားလုံးစုံဖြစ်နေရင် ဘာဖြစ်မယ်ဆိုတာ မပြောထားပါဘူး။ Euler ဟာ ဒီသီအိုရမ်ရဲ့ converse version ကိုပါ သက်သေပြခဲ့တာပါ။ Converse version မပြောခင် graph ဆိုင်ရာ vocabulary လေးတစ်လုံး မိတ်ဆက်ပါဦးမယ်။ အကယ်၍ graph ထဲရှိ မည်သည့် vertex နှစ်ခုအတွက်မဆို ယင်း vertex တစ်ခုမှ တစ်ခုသို့ သွားနိုင်သောလမ်းကြောင်းရှိလျှ ယင်း graph ကို တစ်ဆက်တည်းရှိသည် (connected ဖြစ်သည်) လို့ခေါ်ပါမယ်။ ပုံ 4 ထဲက အောက်ခံ graph ဟာ connected ဖြစ်ပြီး အောက်ပါပုံ 7 ထဲက graph ကတော့ connected မဖြစ်ပါ။ ဒီလောက်ဆို Euler ရဲ့ သီအိုရမ်ကို အပြည့်အစုံဖော်ပြလို့ရပါပြီ။



ပုံ 7 – Connected မဖြစ်တဲ့ graph

Theorem. A graph has a circuit containing all edges if and only if it is connected and every vertex has even degree.

Edge အားလုံးပါတဲ့ပတ်လမ်းရှိရင် vertex အားလုံးမှာ degree စုံကိန်းရှိတယ် ဆိုတာကိုအပေါ်မှာပြောခဲ့ ပြီးပါပြီ။ ဒီလိုပဲ connected လည်းဖြစ်မယ်ဆိုတာ မြင်သာပါတယ်။ အပြန်အလှန်ရဲ့သက်သေပြချက်ကိုတော့ ဒီစာအုပ်ထဲမှာ မရေးတော့ပါဘူး။

ဒီချဲလင့်မှာ Jack ကအဆုံးမှာ သူ့အိမ်သူပြန်ရောက်ဖို့မလိုဘူးဆိုရင် မေးခွန်းကနည်းနည်းပြောင်းသွားပါတယ်။ Graph တစ်ခုပေါ်မှာရှိတဲ့ vertex တစ်ခုမှ အခြား vertex တစ်ခုသို့သွားတဲ့အခါ edge တွေကိုတစ်ကြိမ်ထက်ပိုမဖြတ်ရင် အဲ့ဒီသွားတဲ့လမ်းကြောင်းကို လျှောက်လမ်း (trail) လို့ခေါ်ပါတယ်။ ဒီတော့ စမှတ်နဲ့ ဆုံးမှတ်တူတဲ့ လျှောက်လမ်းတွေဟာ ပတ်လမ်းတွေပဲပေါ့။ ပြောင်းသွားတဲ့မေးခွန်းကို graph ဘာသာစကားနဲ့ပြန်ရေးရင် “ပေးထားတဲ့ graph မှာ edge အားလုံး ပါဝင်နေတဲ့ လျှောက်လမ်းရှိသလား” လို့ဖြစ်သွားပါတယ်။

ပတ်လမ်းတွေထဲမှာ degree အားလုံးစုံကိန်းဖြစ်သလိုမျိုး လျှောက်လမ်းတွေမှာလည်း အလားတူမှန်ကန်ချက် ထုတ်လို့ရပါတယ်။ ဘာကြောင့်မှန်သလဲကတော့ ကိုယ့်ဘာသာစဉ်းစားဖို့ပါ။

လျောက်လမ်းတစ်ခုပေါ်ရှိ စမှတ်နှင့် ဆုံးမှတ်မှလွဲ၍ ကျန်သော မည်သည့် vertex ၌မဆို
ယင်း vertex နှင့်လာရောက်ချိတ်ဆက်သော လျောက်လမ်းပေါ်ရှိ edge အရေအတွက်သည် စုံကိန်းဖြစ်သည်။
စမှတ်နှင့် ဆုံးမှတ်မတူလျှင် ယင်းအမှတ်များသို့လာချိတ်သော
လျောက်လမ်းပေါ်ရှိ edge အရေအတွက်သည် မကိန်းဖြစ်သည်။

ဒီအချက်ကနေပြီး Euler ရဲ့ theorem ကို လျောက်လမ်း version အဖြစ်ပြောင်းရေးလို့ရပါတယ်။ သက်သေပြချက်ကိုတော့ ရှေ့ကမှန်ရင် နောက်ကမှန်တယ်ဆိုတဲ့အချက်ကို ကိုယ့်ဘာသာစဉ်းစားကြည့်ဖို့ တိုက်တွန်းချင်ပါတယ်။

Theorem. A graph has a trail containing all edges if and only if it is connected and every vertex has even degree except possibly for two vertices.