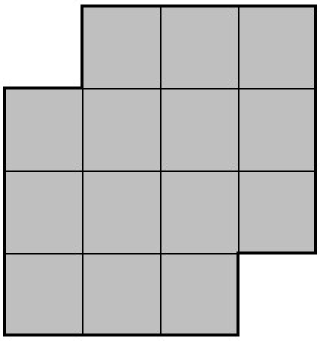
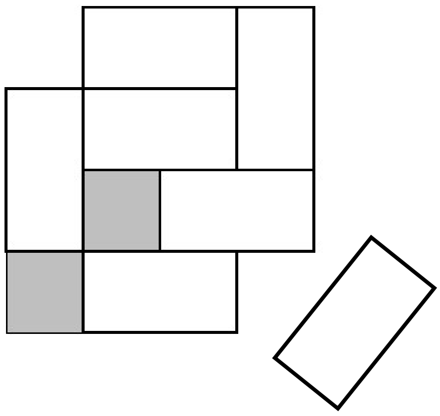
ဒိုးဇက်အပြည့် ခင်းကြမယ်

ပဟေဠိ

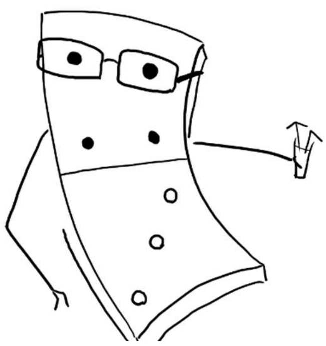
4 × 4 grid တစ်ခုရဲ့ မျက်နှာချင်းဆိုင်ထောင့်စွန်နှစ်ခုက 1 × 1 အကွက်နှစ်ကွက်ကို ပုံ 1 ပါအတိုင်း ဖြုတ်ယူလိုက်ပါ။ ရရှိလာတဲ့ ဘုတ်ပြားပေါ်မှာ 2 × 1 အရွယ်ရှိတဲ့ ဒိုးဇက် (domino) 7 ခုကို လိုက်တင်ပါမယ်။ ဖြစ်ချင်တာကတော့ ဘုတ်ပြားပေါ်မှာ နေရာလွတ်လုံးဝမကျန်တော့အောင် ကွက်တိတင်ချင်တာပါ။ တင်ဖို့ဖြစ်နိုင်သလား။ ဖြစ်နိုင်တယ်ဆိုရင် တင်ပြပါ။ မဖြစ်နိုင်ရင် မဖြစ်နိုင်ကြောင်းရှင်းရှင်းလင်းလင်းပြပါ။ ပုံ 2 ကတော့ တင်ဖို့မအောင်မြင်လိုက် တဲ့ အနေအထားတစ်ခုဖြစ်ပါတယ်။



ပုံ 1 - ဒိုးဇက်တွေတင်မယ့်ဘုတ်



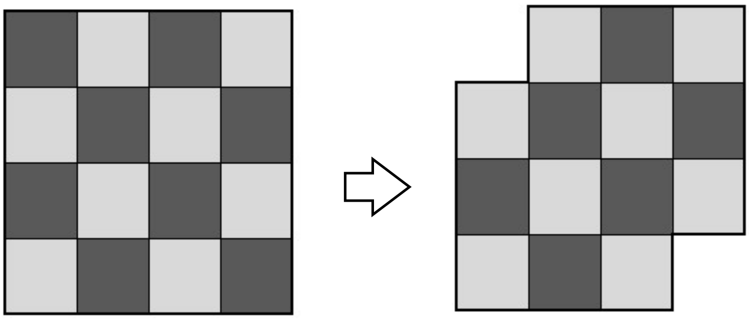
ပုံ 2 – A failure



နောက်ကွယ်က သင်္ချာ

SDR များနှင့် Hall's Marriage Theorem

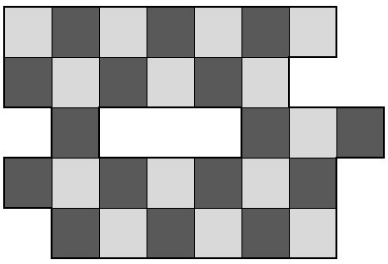
ဒိုးဇက်တွေကို ခဏလောက်ကိုယ်တိုင်လျှောက်ချကြည့်ရင် ငါးမိနစ်လောက်နဲ့တင် အပြည့်ခင်းဖို့ မဖြစ်နိုင်ဘူး ဆိုတာကို ရိပ်မိမှာပါ။ တကယ်လည်း မဖြစ်နိုင်ပါဘူး။ မဖြစ်နိုင်ရတဲ့ အကြောင်းရင်းကတော့ အလွန်ကိုရှင်းပါတယ်။ ပုံ 3 ထဲကအတိုင်း ဘုတ်ပြားကို ကျားကွက်ခြယ်သလို အနက်တစ်လှည့် အဖြူတစ်လှည့် အရောင်ခြယ်လိုက်ပါ။



ပုံ 3 – ကျားကွက် ခြယ်သကဲ့သို့

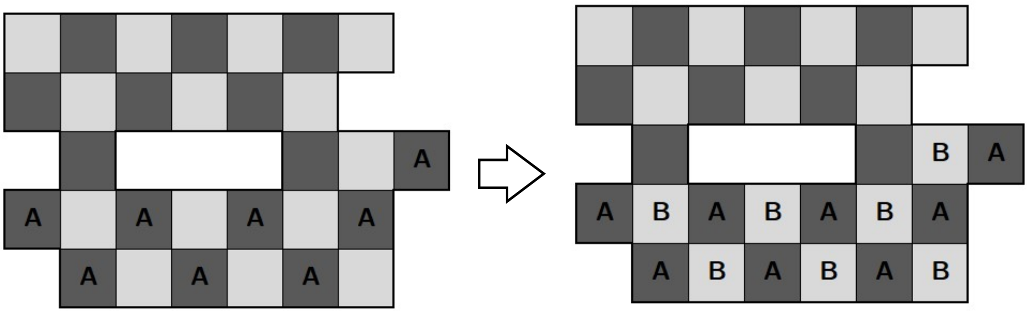
ထောင့်စွန်က 1×1 အကွက်နှစ်ကွက်ကို မဖြုတ်ယူခင်အနေအထားမှာ အဖြူကွက်အရေအတွက်နဲ့ အနက်ကွက်အရေအတွက် တူနေပြီး ဖြုတ်လိုက်တဲ့နှစ်ကွက်သည် အနက်တွေဖြစ်တာကြောင့် ရရှိလာတဲ့ဘုတ်ပြားမှာ အဖြူကွက်အရေအတွက်က အနက်ကွက်အရေအတွက်ထက် နှစ်ကွက်ပိုများနေပါတယ်။ ဒိုးဇက်တစ်ခုစီတိုင်းသည် အဖြူကွက်တစ်ကွက်နဲ့ အနက်ကွက်တစ်ကွက်ကို တွဲဖက်ပေးတာဖြစ်လို့ ဘယ်လိုတင်တင် အနည်းဆုံးတော့ တွဲဖက်စရာမရှိတဲ့အဖြူရောင်နှစ်ကွက်က လွတ်ပြီးကျန်ခဲ့မှာပါ။ ဒါကြောင့် ဒိုးဇက် 7 ခုနဲ့အပြည့်ခင်းဖို့ မဖြစ်နိုင်ရတာပါ။

ပုံ 4 ပါဘုတ်ပြားမှာတော့ အလယ်မှာအပေါက်အချို့ပါပါတယ်။ ဒီဘုတ်ပြားပေါ်ကျတော့ အဖြူကွက်နဲ့ အနက်ကွက်အရေအတွက်တူပေမယ့် ဒိုးဇက် 16 ခုနဲ့ အပြည့်ခင်းလို့မရပါဘူး။ ဘာကြောင့်မရသလဲ စဉ်းစားလို့ရပါသလား။



ပုံ 4 – ခလယ်ပေါက်ပါတဲ့ ဘုတ်ပြားတစ်ခု

ပုံ 5 မှာပြထားတဲ့အနက်ကွက် 6 ကွက်ပေါ်မှာ A လို့ရေးလိုက်ပါ။ ဆက်ပြီး A လို့ရေးထားတဲ့ အနက်ကွက်တွေနဲ့အနားချင်းထိစပ်နေတဲ့ အဖြူကွက်တွေပေါ်မှာ B လို့ရေးလိုက်ပါ။



ပုံ 5 – A တွေနဲ့ သူတို့နဲ့တွဲလို့ရတဲ့ B တွေ

တကယ်လို့များ ဒီဘုတ်ကိုဒိုးဇက်တွေနဲ့ အပြည့်ခင်းလို့ရခဲ့မယ်ဆိုရင် ဒိုးဇက်တွေဟာ A တစ်ခုစီကို သက်ဆိုင်ရာ B တစ်ခုစီနဲ့ လိုက်တွဲဖက်ပေးပါလိမ့်မယ်။ ဒါပေမယ့် A က 8 လုံးရှိနေပြီး ဒီ 8 လုံးနဲ့တွဲဖက်စရာ B ကတော့ 7 လုံးသာရှိပါတယ်။ ဒါကြောင့် ဒိုးဇက်တွေကို အပြည့်တင်ဖို့မဖြစ်နိုင်ပါဘူး။

ဒီဒိုးဇက်ပုစ္ဆာတွေဟာ 'တွဲဖက်မယ့်ကောင်တွေ (A တွေ) နဲ့ တွဲဖက်ခံမယ့်ကောင်တွေ (B တွေ) ပါဝင်ပြီး A တစ်လုံးစီတိုင်းဟာ မိမိနဲ့သက်ဆိုင်ရာ B တစ်လုံးစီနဲ့ တွဲဖက်လို့ရသလား' ဆိုတဲ့မေးခွန်းမျိုးတွေဖြစ်ပါတယ်။ ဒီမေးခွန်းမျိုးကို အောက်ပါအတိုင်း generalize လုပ်လို့ရပါတယ်။ ရုတ်တရက်ကြည့်ရင် generalization မှန်းသိပ်မသိသာပါဘူး။

Let $A_1, A_2, \dots, A_n$ be given finite sets.
Is it possible to find n distinct elements $a_1, a_2, \dots, a_n$ such that $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots$ and $a_n \in A_n$?
If it is possible, $a_1, a_2, \dots, a_n$ is called the **system of distinct representatives (SDR)** of $A_1, A_2, \dots, A_n$.

ဥပမာ $A_1 = \{1, 2\}, A_2 = \{1, 2, 3\}, A_3 = \{1, 4\}$ နဲ့ $A_4 = \{1, 2\}$ ဖြစ်မယ်ဆိုရင် A_1 ထဲက 1, A_2 ထဲက 3, A_3 ထဲက 4 နဲ့ A_4 ထဲက 2 ကိုရွေးလို့ရတဲ့အတွက် $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (1, 3, 4, 2)$ ဟာ system of distinct representatives ဖြစ်ပါတယ်။ တစ်နည်းအားဖြင့် အစုတစ်ခုစီကနေ ကိုယ်စားပြု element တစ်ခုစီရွေးချယ်တဲ့သဘောပေါ့။

မြင်သာတဲ့ဥပမာအနေနဲ့ straight ယောကျ်ားလေး 5 ယောက်က သူတို့ကြိုက်နေတဲ့ မိန်းကလေးတွေကို လိုက်ချင်တယ်ဆိုပါစို့။ ယောကျ်ားလေးတစ်ယောက်စီအတွက် သူကြိုက်နေတဲ့ မိန်းကလေးတွေရဲ့ အစုဖန်တီးကြည့်မယ်။ ဆိုကြပါစို့

Boy 1 က $A_1 = \{a, c\}$ ကိုကြိုက်တယ်။
Boy 2 က $A_2 = \{a, c, e\}$ ကိုကြိုက်တယ်။
Boy 3 က $A_3 = \{b, c, e, f\}$ ကိုကြိုက်တယ်။
Boy 4 က $A_4 = \{a, e\}$ ကိုကြိုက်တယ်။
Boy 5 က $A_5 = \{c, e\}$ ကိုကြိုက်တယ်။

ဒါဆိုရင် မိန်းကလေးတစ်ယောက်တည်းကို နှစ်ယောက်ပြိုင်လိုက်တာမျိုး မဖြစ်စေဘဲနဲ့ ယောကျ်ားလေးတိုင်းက သူကြိုက်နေတဲ့ မိန်းကလေးတစ်ယောက်ကို လိုက်လို့ရမလားဆိုတဲ့မေးခွန်းဟာ အစုငါးခုမှာ SDR ရှိသလားဆိုတဲ့ မေးခွန်းနဲ့ အတူတူပါပဲ။ အခုအပေါ်ကပေးထားတဲ့အတိုင်းဆိုရင်တော့ ပြိုင်လိုက်ကိုလိုက်ရပါလိမ့်မယ်။ Boy 1, 2, 4, 5 ကိုကြည့်လိုက်ပါ။ ယောကျ်ားလေးက လေးယောက်ပေမယ့် သူတို့ထဲက တစ်ယောက်ယောက်အကြိုက်ခံရတဲ့ မိန်းကလေးက a, c, e သုံးယောက်တည်းရှိပါတယ်။ အဲ့တော့ ဒီယောကျ်ားလေးလေးယောက်စလုံးက တစ်ယောက်ယောက်ကိုလိုက်ခဲ့ရင် ပြိုင်အလိုက်ခံရတဲ့မိန်းကလေး ရှိကိုရှိရမှာပါ။ ဒါကို အစု version နဲ့ပြောရင် A_1, A_2, A_4, A_5 ဟာအစုလေးခုဖြစ်ပေမယ့် $A_1 \cup A_2 \cup A_4 \cup A_5$ ထဲမှာ အစုဝင်သုံးခုတည်းရှိတာကြောင့် SDR မရှိပါဘူး။ ဒီအတိုင်း general ကျကျစဉ်းစားကြည့်ရင် အောက်ပါမှန်ကန်ချက်ကိုရပါလိမ့်မယ်။

Suppose $A_1, A_2, \ldots, A_n$ has a SDR. Then, for *any* of k distinct sets $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}$, the union $A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \ldots \cup A_{i_k}$ contains at least k elements.

ဒါဟာ အလွန်ကိုရိုးစင်းပြီး မြင်သာတဲ့နောက်ဆက်တွဲပါ။ ဒါပေမယ့်အံ့ဩဖို့ကောင်းတာကတော့ အဲ့ဒီနောက်ဆက်တွဲမှန်တာနဲ့ SDR ရှိတယ်ဆိုတာကို ကျိမ်းသေပြောနိုင်တာပါပဲ။ တစ်နည်းအားဖြင့်ပြောရင် converse လည်းမှန်တယ်ပေါ့။ ဒါကို Hall's Marriage Theorem လို့ခေါ်ပါတယ်။

Theorem. **(Hall's Marriage Theorem)** $A_1, A_2, \ldots, A_n$ has a SDR if and only if for any k distinct sets $A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$, the union $A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \ldots \cup A_{i_k}$ contains at least k elements.

ထုံးစံအတိုင်းပဲ converse ရဲ့သက်သေပြချက်က နည်းနည်းရှည်တဲ့အတွက် ဒီစာအုပ်ထဲထည့်မရေးတော့ပါဘူး။ Bipartite graph တွေအကြောင်း ဖတ်ပြီးသွားပြီဆိုရင်တော့ ဒီသီအိုရမ်ကို အောက်ပါအတိုင်း version ပြောင်းရေးလို့ရပါတယ်။

Theorem. **(Graph version of marriage theorem)** Let G be a bipartite graph whose set of white vertices are denoted by A. We can select $|A|$ edges that do not share endpoints if and only if for any $S \subseteq A$, number of vertices adjacent to some vertex of S is at least $|S|$.

ဒီဗားရှင်းနှစ်ခုဟာ အတူတူပဲဖြစ်ကြောင်းကို ကိုယ့်ဘာသာပြကြည့်ဖို့တိုက်တွန်းပါတယ်။ အဲ့ဒီလိုပဲ SDR တွေနဲ့ ဒိုးဇက်အပြည့်ခင်းတဲ့ပုစ္ဆာဟာ မည်သို့မည်ပုံသက်ဆိုင်နေကြောင်းကိုလည်း ကိုယ့်ဘာသာပဲ စဉ်းစားကြည့်ဖို့ အိမ်စာပေးလိုက်ပါတယ်။