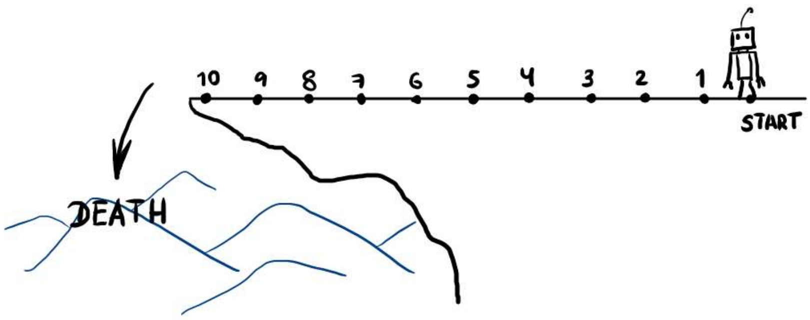
တစ်လှမ်းလား နှစ်လှမ်းလား

ကျောက်ကမ်းပါးတစ်ခုရဲ့အစွန်းနားမှာ စက်ရုပ်လေးတစ်ရုပ်ရပ်နေပါတယ်။ စက်ရုပ်လေးက ရှေ့ကိုခြေလှမ်း ဆယ်လှမ်းပဲလှမ်းလို့ရပါတယ်။ အဲ့ထက်ပိုလှမ်းတာနဲ့ ချောက်ထဲပြုတ်ကျမှာပါ။ စာဖတ်သူနဲ့ ကျွန်တော်က ဒီစက်ရုပ်လေးကို တစ်လှည့်စီ ရှေ့တိုးဖို့ အမိန့်ပေးပါမယ်။ တိုးတဲ့အခါ တစ်လှမ်း သို့မဟုတ် နှစ်လှမ်း တိုးခိုင်းလို့ရပါတယ်။ ဒီထက်ပို လှမ်းခိုင်းလို့မရသလို နေရာမှာရပ်နေခွင့်လည်းမရှိပါဘူး။ စက်ရုပ်ကို ချောက်ထဲပြုတ်ကျအောင် မဖြစ်မနေ အမိန့်ပေးလိုက်ရတဲ့သူက အရှုံးဖြစ်ပါတယ်။ ကဲ… ကျွန်တော်နဲ့ဆော့ကြည့်ရအောင်။



ပုံ 1 - တစ်လှမ်းလား နှစ်လှမ်းလား

ကဲ… ကျွန်တော်အရင်စဆော့ရမလား၊ စာဖတ်သူအရင်စဆော့ချင်လားရွေး။ စာဖတ်သူအလှည့်မှာတော့ စာဖတ်သူ စိတ်ကြိုက်အမိန့်ပေးပေါ့။ ကျွန်တော့်အလှည့်မှာတော့ စက်ရုပ်လေးလက်ရှိရောက်နေတဲ့ ခြေလှမ်းရဲ့နံပါတ်အလိုက် အမိန့်တွေကို အောက်ကဇယားထဲကအတိုင်းပေးပါမယ်။

စက်ရုပ်ရောက်နေတဲ့ ခြေလှမ်းအမှတ်	START, 3, 6, 7, 9, 10	1, 2, 4, 5, 8
ကျွန်တော်ပေးမယ့်အမိန့်	1 လှမ်းလှမ်းပါ	2 လှမ်းလှမ်းပါ

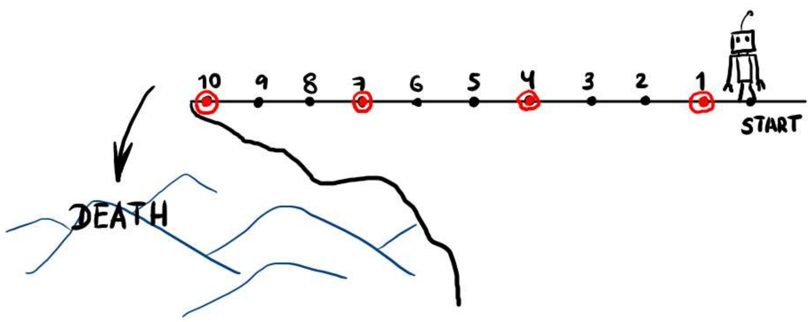
ဇယား 2 - ကျွန်တော်ဆော့မယ့်ပုံစံ

ကျွန်တော့်ကိုနိုင်အောင်ဆော့နိုင်ရင်တော့ congratulations ပါဗျာ။ ဆော့ပြီးလို့စိတ်ဝင်စားရင် ကျွန်တော် တစ်ယောက်တည်း တစ်လှည့်စီဆော့တာ ကြည့်ကြည့်ပေါ့။

နောက်ကွယ်က သင်္ချာ

Symmetric game များနှင့် winning strategy တည်ဆောက်ပုံ

ကျွန်တော့်ရဲ့ ဒီဂိမ်းကိုနိုင်နည်းအကြောင်း အရင်ရှင်းပြပါမယ်။ 1, 4, 7, 10 ဆိုတဲ့အမှတ်လေးခု ပုံ 3 ထဲကအတိုင်း ဝိုင်းထားလိုက်ပါ။ ဒီလေးမှတ်ကို 'အမှတ်ဆိုး' တွေလို့ခေါ်ပြီး ကျန်တဲ့အမှတ်တွေကို 'အမှတ်ကောင်း' တွေလို့ခေါ်ပါမယ်။



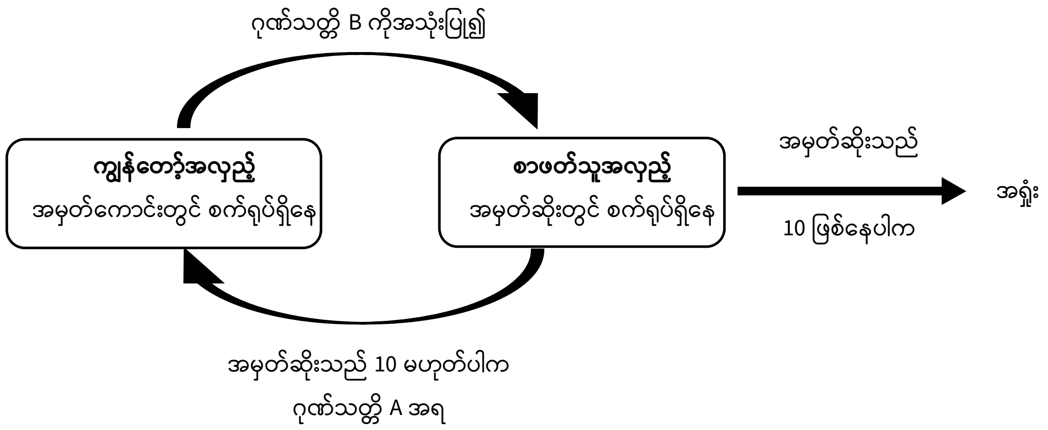
ပုံ3 - အမှတ်ကောင်းနဲ့ အမှတ်ဆိုး

ဒါဆိုရင် အမှတ်ဆိုးတွေနဲ့ အမှတ်ကောင်းတွေကြားမှာ အောက်ပါဆက်သွယ်ချက်ကိုတွေ့ရမှာပါ။

A. 10 မှအပ မည်သည့်အမှတ်ဆိုးမှမဆိုနေ၍ မည်သည့်အမိန့်ပေးစေကာမူ အမှတ်ကောင်းဆီသို့ရောက်သည်။

B. မည်သည့်အမှတ်ကောင်းမှမဆို အမှတ်ဆိုးဆီသို့ရောက်အောင် ပေးနိုင်သောအမိန့်ရှိသည်။

ဒီဂုဏ်သတ္တိနှစ်ခုက ကျွန်တော့်နိုင်နည်းရဲ့ သော့ချက်ပါပဲ။ စက်ရုပ်လေးက ကျွန်တော်ရွှေ့ရမယ့်အလှည့်မှာ အမှတ်ကောင်းပေါ်မှာ ရပ်နေတယ်ဆိုပါစို့။ ဂုဏ်သတ္တိ B အရ စာဖတ်သူရဲ့အလှည့်မှာ အမှတ်ဆိုးပေါ်ရောက်နေအောင် ကျွန်တော်က အမိန့်ပေးလိုက်လို့ရပါတယ် (ပုံ 4)။ စာဖတ်သူအလှည့်မှာအမှတ်ဆိုးပေါ်ရောက်နေရင် စာဖတ်သူဘာလုပ်လုပ် ဂုဏ်သတ္တိ A အရ အမှတ်ကောင်းဆီရောက်မှာပါ။ ဒါဆိုကျွန်တော်က ဂုဏ်သတ္တိ B ကိုသုံးပြီး စက်ရုပ်လေးကိုအမှတ်ဆိုးပေါ် ပြန်ရွှေ့ခိုင်းလိုက်ရုံပါပဲ။ ဒီအတိုင်းဆက်လုပ်ခြင်းဖြင့် စက်ရုပ်လေးဟာ စာဖတ်သူအလှည့်ရောက်တိုင်း အမှတ်ဆိုးပေါ် ရောက်နေမှာဖြစ်ပြီး ကျွန်တော့်အလှည့်ရောက်တိုင်း အမှတ်ကောင်းပေါ်ရောက်နေမှာဖြစ်ပါတယ်။ အရှုံးကိုဖြစ်စေတဲ့ 10 ဆိုတဲ့အမှတ်ဟာ အမှတ်ဆိုးဖြစ်တဲ့အတွက် ဒီလိုသာဆိုစာဖတ်သူပဲ ကျိမ်းသေပေါက်ရှုံးတော့မှာပါ။



ပုံ 4 - ဂုဏ်သတ္တိနှစ်ခု ချိတ်ဆက်အလုပ်လုပ်ပုံ

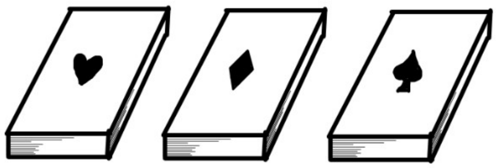
ဒါကိုတစ်နည်းအားဖြင့် ကစားသူတစ်ဦးက ကျန်ကစားသူကို "အဝိုင်းမှတ်တွေထဲ ပြန်ပြန်ရိုက်ထည့်လို့ရတယ်" လို့မြင်နိုင်ပါတယ်။

အခုတွေ့လိုက်ရတဲ့ စက်ရုပ်လေးကိုလမ်းလျှောက်ခိုင်းတဲ့ ဂိမ်းမျိုးမှာ ကစားသူနှစ်ဦးလုံးက ဒီစက်ရုပ်ကလေးကိုပဲ ကိုင်တွယ်ကစားတာဖြစ်ပြီး နှစ်ဦးလုံးအတွက် စည်းမျဉ်းတွေကလည်း တထေရာတည်းတူညီပါတယ်။ တစ်နည်းအားဖြင့် နှစ်ဦးလုံးရဲ့ လုပ်ပိုင်ခွင့်ကတူညီပါတယ်။ ဒီလိုမျိုး နှစ်ဦးနှစ်ဖက်လုံးအတွက် လုပ်ပိုင်ခွင့်တထေရာတည်း တူညီနေတဲ့ game တွေကို ခေါက်ချိုးညီဂိမ်း (symmetric game) လို့ခေါ်ပါတယ်။ တိတိကျကျပြောရရင်တော့

မည်သည့်အခြေအနေ၌မဆို ကစားသမား (1) ပြုလုပ်နိုင်သောရွှေ့ကွက်များနှင့် ကစားသမား (2) ပြုလုပ်နိုင်သောရွှေ့ကွက်များသည် တထေရာတည်းတူနေခဲ့သော် ယင်းဂိမ်းကို symmetric game ဟုခေါ်သည်

လို့သတ်မှတ်နိုင်ပါတယ်။ ဥပမာ ကျွန်တော်တို့ကစားခဲ့တဲ့ စက်ရုပ်ဂိမ်းလေးက symmetric game ဖြစ်ပါတယ်။ ဒါပေမယ့် စစ်တုရင်ကတော့ symmetric game မဟုတ်ပါ။ အဖြူကစားသမားဟာ အဖြူရုပ်တွေကိုသာ ရွှေ့ခွင့်ရှိပြီး အနက်ကစားသမားဟာ အနက်ရုပ်တွေကိုသာ ရွှေ့ခွင့်ရှိတဲ့အတွက် ဖြစ်ပါတယ်။ Symmetric game တွေအတွက် ဥပမာအချို့ကို ဖော်ပြလိုက်ပါတယ်။

ဥပမာ (1) ။ ။ **(Game of NIM)** စားပွဲပေါ်မှာ ဖဲချပ် N ချပ်ကို အပုံ k ပုံခွဲပြီးပုံထားပါတယ်။ လူနှစ်ယောက်က အလှည့်ကျ ကစားရာမှာအလှည့်ကျသူက မိမိနှစ်သက်ရာဖဲချပ်ပုံ တစ်ပုံကိုယူ၍ မိမိနှစ်သက်ရာဖဲချပ်အရေအတွက် (အနည်းဆုံးတစ်ချပ်) ကိုဖယ်ထုတ်နိုင်ပါတယ်။ ကစားရင်းဖြင့် ယူစရာဖဲချပ်မကျန်တော့သူက အရှုံးဖြစ်ပြီး နောက်ဆုံးဖဲချပ်ကို ယူနိုင်လိုက်သူက အနိုင်ဖြစ်ပါတယ်။



ပုံ 5 – NIM ဆော့ဖို့ပုံထားတဲ့ဖဲချပ်တွေ

ဥပမာ $k = 2$ အတွက်ဘယ်အခြေအနေကစရင် ဘယ်သူနိုင်မလဲ စဉ်းစားကြည့်ရအောင်။ စားပွဲပေါ်က အပုံ 1 မှာဖဲချပ် a ချပ်ရှိပြီး အပုံ 2 မှာဖဲချပ် b ချပ်ရှိတဲ့ အခြေအနေကို (a, b) ဆိုတဲ့အတွဲလေးနဲ့ ကိုယ်စားပြုပါမယ်။ $a = b$ ဖြစ်တဲ့အခြေအနေတွေဖြစ်တဲ့ $(0, 0), (1, 1), (2, 2), \ldots$ တွေကို "အခြေအနေဆိုး" တွေလို့ခေါ်ပြီး $a \neq b$ ဖြစ်တဲ့အခြေအနေတွေကို အခြေအနေကောင်းတွေလို့ခေါ်ပါမယ်။ ဒါဆိုရင်

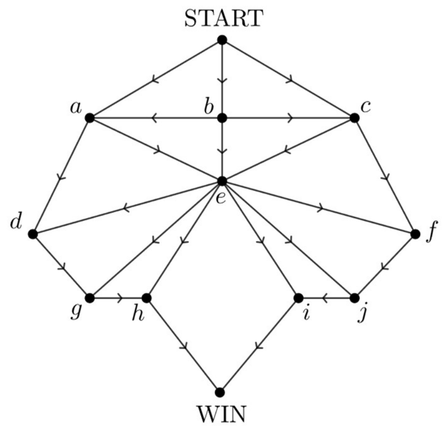
- အခြေအနေဆိုးတစ်ခုကနေ ဘာလုပ်လုပ်အခြေအနေကောင်းဖြစ်သွားတယ်
- အခြေအနေကောင်းတစ်ခုကနေ အခြေအနေဆိုးရောက်သွားအောင်လုပ်လို့ရတယ်

ဆိုပြီးဖြစ်နေတာကို တွေ့ရမှာပါ။ ဒါကြောင့် ကစားသူတစ်ဦးက မိမိရဲ့ပြိုင်ဖက်ကို အခြေအနေဆိုးတွေထဲ တောက်လျှောက်ရိုက်ထည့် နေလို့ရပါတယ်။ $(0, 0)$ ဆိုတဲ့အခြေအနေဆိုးမှာ မိမိအလှည့်ကျသူက ရှုံးမှာဖြစ်လို့ အခြေအနေဆိုးတွေထဲရိုက်ထည့်ခံရတဲ့ ကစားသမားကရှုံးပါပြီ။ ဒါကြောင့်စစချင်းအခြေအနေမှာ $a = b$ ဖြစ်နေခဲ့ရင် စဆော့တဲ့သူရှုံးမှာဖြစ်ပြီး $a \neq b$ ဖြစ်ရင်တော့ ဒုတိယဆော့တဲ့သူရှုံးမှာဖြစ်ပါတယ်။

ပုံ 6 - ဂုဏ်သတ္တိနှစ်ခု ချိတ်ဆက်အလုပ်လုပ်ပုံ (again)

ကျန်တဲ့ k တန်ဖိုးတွေအတွက်ကတော့ $k = 1$ ကလွဲရင်ဒီလောက်မလွယ်ပါဘူး။ $k > 2$ အတွက် အခြေအနေကောင်းနဲ့အခြေအနေဆိုးကို ဘယ်လိုခွဲခြားသတ်မှတ်လို့ရမယ်ဆိုတာကို အသေးစိတ်သိချင်ရင်တော့ ဒီမှာဝင်ဖတ်ကြည့်နိုင်ပါတယ်။ (insert brilliant link)

ဥပမာ (2) ။ ။ **(Symmetric games as graphs)** အောက်ပါပုံ 7 ထဲမှာ နာမည်အသီးသီးတပ်ထားတဲ့ အစက်ကလေးတွေရယ်၊ အဲ့အစက်ကလေးတွေကို ချိတ်ဆက်ထားတဲ့ မြားလေးတွေရယ်ရှိပါတယ်။ ပွဲအစမှာ ဒင်္ဂါးပြားလေးတစ်ခုကို START လို့ရေးထားတဲ့အစက်ပေါ်မှာ တင်ထားပါတယ်။ ကစားသူတစ်ယောက်ဟာ သူ့ရဲ့အလှည့်မှာ ဒင်္ဂါးပြားလေးကို မြားတစ်ခုအတိုင်း ရွှေ့ခွင့်ရှိပါတယ်။ WIN ဆိုတဲ့အစက်ဆီကို ဒင်္ဂါးပြားရွှေ့လိုက်နိုင်သူဟာ အနိုင်ဖြစ်ပါတယ်။

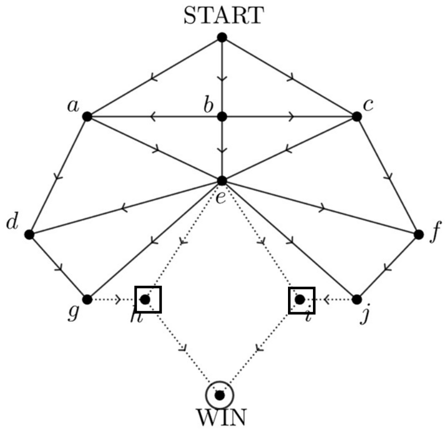


ပုံ 7 – Graph ပေါ်မှာလမ်းလျှောက်ကြမယ်

ဒီမှာလည်း ထုံးစံအတိုင်းပါပဲ။ အစက်ကောင်းနဲ့ အစက်ဆိုးဆိုပြီး အစက်နှစ်မျိုးကို အောက်ပါဂုဏ်သတ္တိနဲ့ ပြည့်စုံအောင်လို့ ရွေးချယ်ပါမယ်။

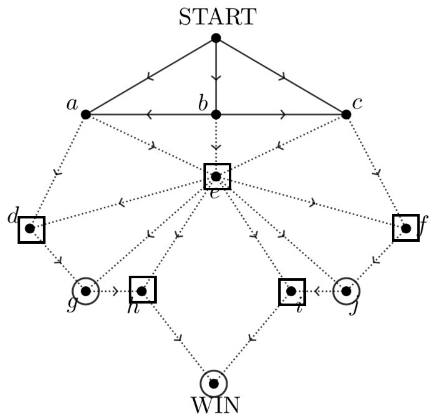
- အစက်ဆိုးကနေ ဘယ်ကိုရွှေ့ရွှေ့အစက်ကောင်းဖြစ်တယ် (i.e. အစက်ဆိုးနှစ်ခု အချင်းချင်းမဆက်ဘူး)။
- အစက်ကောင်းကနေ အစက်ဆိုးဆီကို ရွှေ့လို့ရတယ် (i.e. အစက်ကောင်းတိုင်းက အစက်ဆိုးတစ်ခုခုနဲ့ချိတ်ရမယ်)။

အနိုင်ရချင်တဲ့ကစားသမားက ကိုယ့်ပြိုင်ဘက်ကို အစက်ဆိုးထဲကို ရိုက်သွင်းရမှာပါ။ ဒါကြောင့် WIN ရေးထားတဲ့အစက်ဟာ အစက်ဆိုးဖြစ်သင့်ပါတယ်။ အစက်ဆိုးနှစ်ခုမဆက်စေလိုတဲ့အတွက် WIN အစက်ဆိုးနဲ့ချိတ်ထားတဲ့ h နဲ့ i က အစက်ကောင်းတွေဖြစ်ရပါမယ်။ ဒါဆိုရင်ပုံထဲမှာ WIN, h နဲ့ i ဆိုတဲ့အစက်တွေကို မေ့ထားလိုက်လို့ရပါပြီ။ အစက်ဆိုးတွေကို စက်ဝိုင်းလေးနဲ့ဝိုင်းပြပြီး အစက်ကောင်းတွေကို လေးထောင့်ဘောင်လေးခတ်ပြထားပါတယ်။



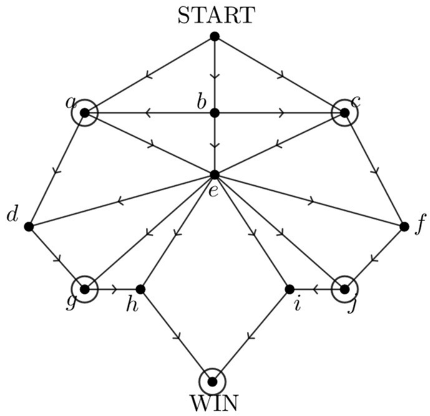
ပုံ 8 - အမှတ်ကောင်းနဲ့ အမှတ်ဆိုးခွဲခြားပုံ အဆင့် 1

ဒါဆိုရင် ကျန်ခဲ့တဲ့ graph ထဲမှာ g နဲ့ j ဟာ အစက်ကောင်းတွေနဲ့သာ ချိတ်ထားတာကြောင့် သူတို့တွေက အစက်ကောင်းတွေမဖြစ်နိုင်ပါဘူး။ ဒါကြောင့် g နဲ့ j ဟာ အစက်ဆိုးတွေဖြစ်ရပါမယ်။ ဒါဆိုအစက်ဆိုးချင်း ချိတ်လို့မရလို့ d, e, f သုံးစက်က အစက်ကောင်းတွေဖြစ်ရပါမယ်။



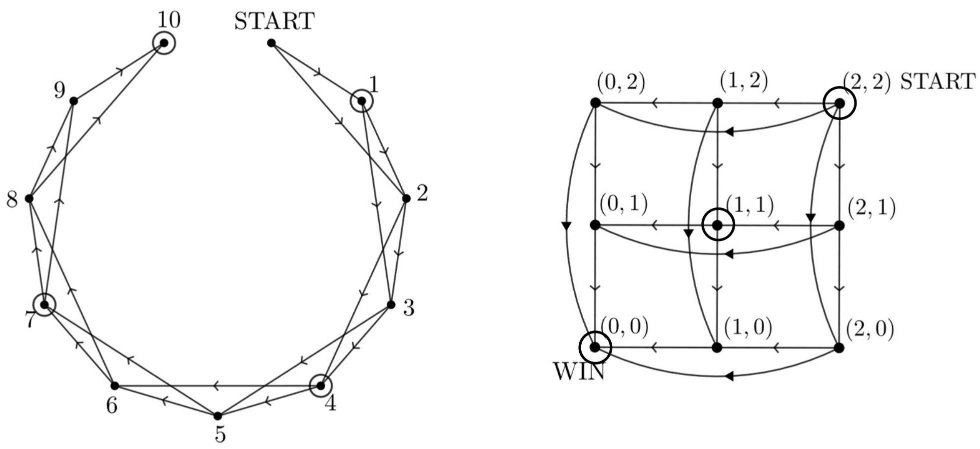
ပုံ 9 - အမှတ်ကောင်းနဲ့ အမှတ်ဆိုးခွဲခြားပုံ အဆင့် 2

ဆက်ပြီးတော့ a နဲ့ c ဟာ အစက်ကောင်းတွေနဲ့သာချိတ်ထားတာကြောင့် သူတို့တွေက အစက်ကောင်းတွေမဖြစ်နိုင်။ ဒါကြောင့် a နဲ့ c က အစက်ဆိုးတွေဖြစ်ရမယ်။ ဒါဆိုသူတို့ကိုလာချိတ်ထားတဲ့ b နဲ့ START က အစက်ကောင်းတွေပဲ။ အခုဆိုရင်တော့ ရှိသမျှအစက်အားလုံးကို အစက်ကောင်းလား အစက်ဆိုးလားခွဲခြားသတ်မှတ်ပြီးသွားပါပြီ။ ဂုဏ်သတ္တိနှစ်ခုကို တကယ်ပြေလည်ရဲ့လားဆိုတာ ပုံ 10 မှာစစ်ကြည့်ပါဦး။ START ဟာ အစက်ကောင်းဖြစ်နေတဲ့အတွက် စဆော့တဲ့သူ နိုင်မယ့်ဂိမ်းအမျိုးအစားဖြစ်ပါတယ်။



ပုံ 10 - အမှတ်ကောင်းနဲ့ အမှတ်ဆိုးခွဲခြားပြီးပါပြီ

ဒီဥပမာ (2) ဟာအလွန်အရေးကြီးပါတယ်။ အကြောင်းကတော့မည်သည့် symmetric game ကိုမဆို ဥ ပမာ (2) ထဲက ဂိမ်းအနေနဲ့ ရှုထောင့်ပြောင်းမြင်လို့ရတာကြောင့်ပါ။ ဖြစ်လာနိုင်တဲ့ အခြေအနေတွေကို အစက်တွေအဖြစ်မြင်ပြီး အခြေအနေ A ကနေ အခြေအနေ B ကိုကူးပြောင်းလို့ရမယ့်ရွှေ့ကွက်ရှိတယ်ဆိုရင် အစက် A ကနေ အစက် B ကိုမြားထိုးလိုက်ရုံပါပဲ။ ပုံ 11 မှာ ကျွန်တော်နဲ့ဆော့ခဲ့တဲ့ စက်ရုပ်ဂိမ်းရယ်၊ ဥပမာ (1) ရဲ့ $(2,2)$ ကစတဲ့ဂိမ်းရယ် ကို ဥပမာ (2) ထဲကဂိမ်းပုံစံဖြစ်အောင် ပြောင်းလဲပြထားပါတယ်။



ပုံ 11 – Symmetric game အားလုံးက ဥပမာ 2 အတိုင်းပဲ

ဒီဂိမ်းတွေဟာ symmetric ဖြစ်ရုံတင်မကဘဲ တစ်ချိန်ချိန်မှာပြီးကိုပြီးတဲ့ဂိမ်း တစ်နည်းအားဖြင့် အနိုင်အရှုံးအမြဲ ကွဲပြားသောဂိမ်းတွေဖြစ်ပါတယ်။ အကယ်၍စက်ရုပ်ဂိမ်းမှာသာ ရှေ့တိုးခွင့်အပြင် နောက်တစ်လှမ်းဆုတ်ခွင့်ပါပေးထားမယ်

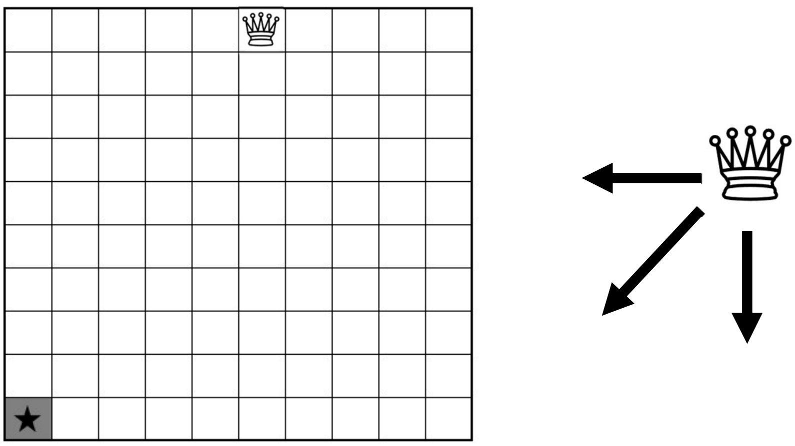
ဆိုရင် တစ်ယောက်ကရှေ့တိုးလိုက်၊ နောက်တစ်ယောက်ကနောက်ပြန်ဆုတ်လိုက်ဖြစ်ပြီး လည်နေတာဖြစ်နိုင်ပါတယ်။ ဒီလိုမျိုး လည်မနေနိုင်ဘဲ တစ်ချိန်ချိန်မှာပြီးကိုပြီးမယ့် ဂိမ်းတွေကို finite game လို့ခေါ်ပါမယ်။ Finite symmetric game အားလုံးအတွက် သက်ဆိုင်ရာ အစက်ဆိုးနဲ့ အစက်ကောင်းတွေကို ဥပမာ (2) မှာလုပ်ပြသွားတဲ့နည်းအတိုင်းရှာဖွေနိုင်ပါတယ်။ ရလာနိုင်တဲ့ အစက်ဆိုးနဲ့ အစက်ကောင်းတွေရဲ့အစုကလည်း unique ဖြစ်ပါတယ်။ ဒါကို graph theory ဘာသာစကားနဲ့တော့ အောက်ပါအတိုင်း ရေးနိုင်ပါတယ်။

Theorem. Let G be a directed graph with no directed cycles. Then, there is a unique subset S of the vertices of G with the following properties:

- there is no directed edge between vertices of S
- for any vertex v not in S, there is a directed edge from v to some vertex in S.

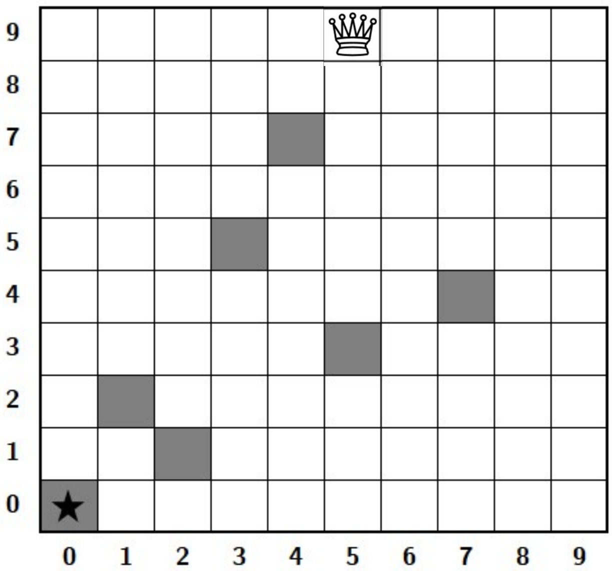
တစ်နည်းအားဖြင့်တော့ finite symmetric game အားလုံးမှာ winning strategy တစ်ခုအတိအကျ အမြဲတမ်းရှိတယ်ဆိုတာကို သွယ်ဝိုက်ပြီး ပြောလိုက်ခြင်းပါပဲ။ သက်သေပြချက်အပြည့်အစုံကိုတော့ ဒီစာအုပ်မှာထည့်မရေးတော့ပါဘူး။ ဥပမာ (2) ကနည်းကို general သုံးပြနိုင်ရုံနဲ့တင်ရလို့ စိတ်ဝင်စားရင်ကိုယ့်ဘာသာပြကြည့်ပါ။

ဥပမာ (3) ။ ။ **(Wythoff's game)** ဒီဂိမ်းလေးကတော့ ကျွန်တော့်ကျောင်းသားတွေနဲ့ ဆော့ဖြစ်တဲ့ဂိမ်းလေးမို့ ထည့်လိုက်တာပါ။ ပုံမှာ 10×10 grid ပေးထားပြီး အကွက်တစ်ကွက်မှာ စစ်တုရင်ရုပ်ကလေးတစ်ရုပ်ကို တင်ထားပါတယ်။ ကစားသူနှစ်ယောက် အလှည့်ကျဆော့ရမှာဖြစ်ပြီး မိမိအလှည့်မှာ စစ်တုရင်ရုပ်လေးကို ဘယ်ဘက်သို့ကြိုက်သလောက် (သို့မဟုတ်) အောက်ဘက်သို့ကြိုက်သလောက် (သို့မဟုတ်) အောက်ဘယ်ထောင့်ဖြတ်အတိုင်းကြိုက်သလောက် ရွှေ့ခွင့်ရှိပါတယ်။ ဘယ်ဘက်အောက်အစွန်က ကြယ်ကလေးဆီကို စစ်တုရင်ရုပ်ပို့လိုက်နိုင်တဲ့သူက အနိုင်ဖြစ်ပါတယ်။ Winning strategy ကိုကိုယ့်ဘာသာရှာကြည့်ပါဦး။



ပုံ 12 – Wythoff's game ကစားမယ့်ဘုတ်နဲ့ စစ်တုရင်အရုပ်လေး

ပုံမှာအရောင်ခြယ်ထားတဲ့ အကွက်တွေက အကွက်ဆိုးတွေပါ။ ကျန်တာတွေက အကွက်ကောင်းတွေပါ။ ဟုတ်မဟုတ်စစ်ကြည့်ပါဦး။



ပုံ 13 – Wythoff's game ထဲကအကွက်ဆိုးတွေ

ဒီဂိမ်းမှာ စိတ်ဝင်စားဖို့ကောင်းတာက အကွက်ဆိုးတွေရဲ့တည်နေရာတွေပါပဲ။ Grid ကို 10 × 10 မဟုတ်ဘဲ အပေါ်ဘက်နဲ့ ညာဘက်တလျှောက် အပိတ်အဆို့မရှိဘဲ infinity အထိဖွင့်ပေးလိုက်ပါမယ်။ တည်နေရာတွေကိုဖော်ပြဖို့ row တွေကိုအောက်ကနေအပေါ် 0, 1, 2, … လို့တပ်ပါမယ်။ Column တွေကိုတော့ ဘယ်ကနေညာ 0, 1, 2, … လို့တပ်ပါမယ်။ ဒါဆိုရင် အကွက်တစ်ကွက်စီကို (r, c) ဆိုတဲ့ row number နဲ့ column number အတွဲလေးတွေနဲ့မြင်လို့ရပါတယ်။ အကွက်ဆိုးတွေရဲ့ coordinates တွေက

$$(0,0), (\lfloor\varphi\rfloor, \lfloor\varphi^2\rfloor), (\lfloor 2\varphi\rfloor, \lfloor 2\varphi^2\rfloor), (\lfloor 3\varphi\rfloor, \lfloor 3\varphi^2\rfloor), \dots, (\lfloor\varphi^2\rfloor, \lfloor\varphi\rfloor), (\lfloor 2\varphi^2\rfloor, \lfloor 2\varphi\rfloor), (\lfloor 3\varphi^2\rfloor, \lfloor 3\varphi\rfloor), \dots$$

ပါ။ ဒီနေရာမှာ $\varphi = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ က golden ratio ဖြစ်ပြီးတော့ $\lfloor x\rfloor$ ကတော့ x ထက်မကြီးတဲ့ အကြီးဆုံး integer ကို ကိုယ်စားပြုပါတယ်။ ဒီကိုဩဒိနိတ်တွေဘယ်ကရလဲနဲ့ ဘာလို့အကွက်ဆိုးတွေဖြစ်သလဲဆိုတာအပါအဝင် Wythoff's game အကြောင်း အသေးစိတ်တွေကို ဒီဆောင်းပါး (insert link) မှာ ဝင်ရောက်ဖတ်ရှုနိုင်ပါတယ်။

အခုလို finite symmetric game တွေအပြင် တခြားဂိမ်းအမျိုးအစားတွေ အများကြီးရှိပါသေးတယ်။ တစ်ယောက်နဲ့ တစ်ယောက်လုပ်ပိုင်ခွင့်မတူတဲ့ ရဲသူခိုးဂိမ်းလိုဂိမ်းတွေ၊ ကစားသူတွေမသိတဲ့ အချက်အလက်တွေပါဝင်နေတဲ့ လူလိမ်ဖော်တဲ့ ဂိမ်းလိုဂိမ်းတွေ၊ ကံတရားနဲ့ပက်သက်နေတဲ့ အံစာဂိမ်း၊ ဖဲဂိမ်းလိုမျိုး ဂိမ်းတွေ စသည်ဖြင့်အများကြီးရှိပါတယ်။ နိုင်ငံရေးလောကတွေ၊ စီးပွားရေးလောကတွေဆိုတာဟာလည်း ကစားသူတွေအများကြီးပါဝင်ပြီး အပေါ်ကအမျိုးအစားတွေထဲ အကုန်အကျုံးဝင်တဲ့ ဂိမ်းအကြီးစားတွေပဲဖြစ်ပါတယ်။ ဒီလိုအမျိုးအစားစုံလှတဲ့ဂိမ်းတွေကိုလေ့လာတဲ့ သင်္ချာဘာသာရပ်ခွဲကို game theory လို့ခေါ်ပါတယ်။ စာဖတ်သူအနေနဲ့ အရသာမြည်းကြည့်ချင်တယ်ဆိုရင် Niki ရဲ့ game theory

နဲ့ပက်သက်တဲ့ဂိမ်း https://ncase.me/trust/ ကို အချိန် 15 မိနစ်လောက်ပေးပြီး သွားဆော့ကြည့်ပါ။ ဆော့ပြီးရင် အတွေးထဲတစ်ခုခုကျန်ခဲ့ဖို့အာမခံပါတယ်။