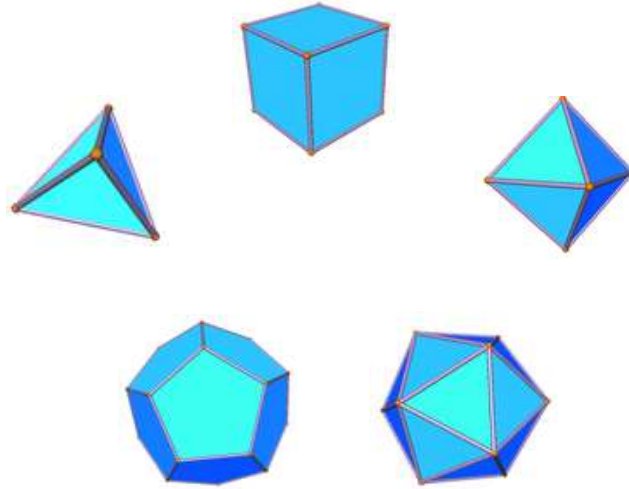


ထုပုံတွေရဲ့ အသက်ညီမျှခြင်း

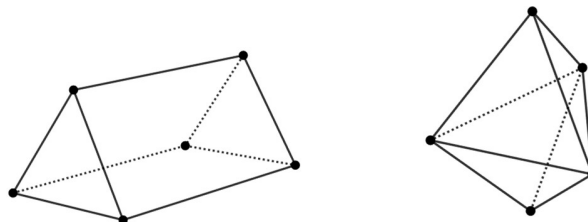


ပုံ 1 - အဘက်ဘက်ကခေါက်ချိုးညီတဲ့ ထုပုံငါးခု

အပေါ်ကပုံမှာမြင်နေရတဲ့ ထုပုံ 5 ခုဟာ အင်မတန်မှထူးခြားတဲ့ ထုပုံတွေဖြစ်ပါတယ်။ လွယ်လွယ်ပြောရင်တော့ ဘယ်ဘက်ကကြည့်ကြည့် ဒီပုံပဲဖြစ်နေလောက်အောင် အဘက်ဘက်ကခေါက်ချိုးညီတဲ့ထုပုံတွေပါ။ တိတိကျကျပြောရင်တော့

- မျက်နှာပြင် (face) အားလုံးဟာ တူညီတဲ့ ဥ သို့မဟုတ် ဟုတ်ကဝတ်ပုံများပဲဖြစ်တယ်။
- ထိပ်စွန်းမှတ် (vertex) တစ်ခုချင်းစီအတွက် ယင်း vertex ပါဝင်နေသော မျက်နှာပြင်အရေအတွက်တွေဟာ တူတယ်။

သာမန်ဆွဲချင်တိုင်းဆွဲထားတဲ့ ထုပုံတွေမှာ ဒီဂုဏ်သတ္တိမရှိတာကိုတွေ့ရမှာပါ။ အောက်ပါပုံတွေဟာ အဘက်ဘက်ကခေါက်ချိုးညီတဲ့ထုပုံတွေမဟုတ်ကြပါဘူး (ဘာလို့လဲ)။



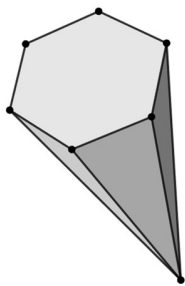
ပုံ 2 - ခေါက်ချိုးမညီတဲ့ ထုပုံနှစ်ခု

အဘက်ဘက်ကခေါက်ချိုးညီတဲ့ နောက်ထပ်ဘာထုပုံတွေရှိသေးလဲ။ ပြင်ညီပုံတွေမှာဆိုရင်တော့ အဘက်ဘက်က ခေါက်ချိုးညီတဲ့ပုံဆိုတာ ဥသည့်ဗဟုဂံပါပဲ။ ဒါကြောင့် အဘက်ဘက်ကခေါက်ချိုးညီတဲ့ ပြင်ညီပုံတွေ မရေမတွက်နိုင်အောင် ရှိပါတယ်။ ထုပုံထဲမှာဆိုရင်ရော... ဒီလိုပဲ မရေမတွက်နိုင်အောင်တည်ဆောက်လို့ရသလား။

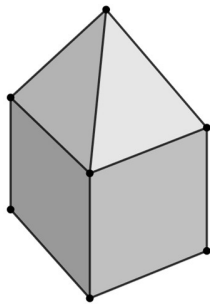
အဖြေကတော့ NO ပါတဲ့။ ပုံ 1 ထဲကငါးခုက အပြင်တခြားဘယ်ထုပုံကမှ အဘက်ဘက်ကခေါက်ချိုးမညီပါဘူးတဲ့။

ဒီထူးဆန်းတဲ့ရလဒ်ကို ဂရိတို့ရဲ့ပညာခေတ်ဖြစ်တဲ့ BC (XXX) ဝန်းကျင်လောက်တည်းက သိရှိခဲ့ပြီး၊ သက်သေပြနိုင်ခဲ့ပြီး ဖြစ်ပါတယ်။ ယူကလစ် (Euclid) ရဲ့ The Elements စာအုပ်အတွဲ XX မှာပါဝင်ခဲ့တာပါ။ ဒီဆောင်းပါးရဲ့ဦးတည်ချက်ကတော့ ဒီရလဒ်ကို သက်သေပြနိုင်ဖို့ဖြစ်ပါတယ်။ ရှေးဆက်မသွားခင်မှာ စာဖတ်သူနဲ့ကျွန်တော်တို့ကြားမှာ ထုပုံရဲ့အဓိပ္ပါယ်ကို တစ်ယောက်တစ်မျိုးထင်နေမှစပြီး ဒီဆောင်းပါးတလျောက် သုံးမယ့် ထုပုံရဲ့အဓိပ္ပါယ်သတ်မှတ်ပုံကို ပြောထားပါဦးမယ်။

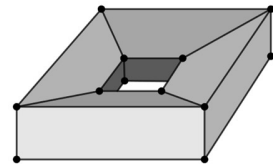
ဗဟုဂံခုံး (convex polygon) တွေကိုယူလိုက်ပါ။ ဗဟုဂံခုံးတစ်ခုစီရဲ့ အနားတစ်ဖက်စီကို အခြားဗဟုဂံခုံးတစ်ခုရဲ့ အနားတစ်ဖက်နဲ့ သွားတွဲချုပ်လိုက်ပါ။ ဗဟုဂံခုံးနှစ်ခုတိုင်းအတွက် တွဲချုပ်ထားတဲ့အနားက အများဆုံးတစ်ဖက်ပဲ ရှိရပါမယ်။ ရရှိလာတဲ့ပုံကို ထုပုံလို့ခေါ်ပါမယ်။ အောက်ပါပုံ 3 ပါပုံအားလုံးဟာ ထုပုံတွေဖြစ်ပါတယ်။



ဆဋ္ဌဂံ 1 ခုနဲ့ ကြိဂံ 6 ခုကိုတွဲချုပ်



ကြိဂံ 4 ခုနဲ့ စတုဂံ 5 ခုကိုတွဲချုပ်



စတုဂံ 16 ခုကိုတွဲချုပ်

ပုံ 3 - ထုပုံအချို့

အသုံးပြုခဲ့တဲ့ ဗဟုဂံခုံးတွေကို ထုပုံရဲ့ မျက်နှာပြင်တွေလို့ခေါ်မှာပါ။ အနားစောင်းနဲ့ ထိပ်စွန်းမှတ်တွေလည်း ထိုနည်းလည်းကောင်းအတိုင်းပါပဲ။ ပုံ 3 ရဲ့ တတိယပုံလိုမျိုး လက်လျှိုသွင်းလို့ရတဲ့အပေါက် မပါဝင်တဲ့ပုံတွေကို polyhedron လို့ခေါ်ပါတယ်။ အရင်ဆုံး polyhedron တွေရဲ့ဂုဏ်သတ္တိအချို့ကို ရှာကြည့်ရအောင်။

ပုံ 1 မှာပါတဲ့ ထုပုံတွေရဲ့ ထိပ်စွန်းမှတ်အရေအတွက် (V)၊ အနားစောင်း (edge) အရေအတွက် (E) နဲ့ မျက်နှာပြင်အရေအတွက် (F) တို့ကိုတွက်ကြည့်ရင် အောက်ပါဇယားအတိုင်း ရရှိလာမှာဖြစ်ပါတယ်။

V	4	8	6	20	12
E	6	12	12	30	30
F	4	6	8	12	20

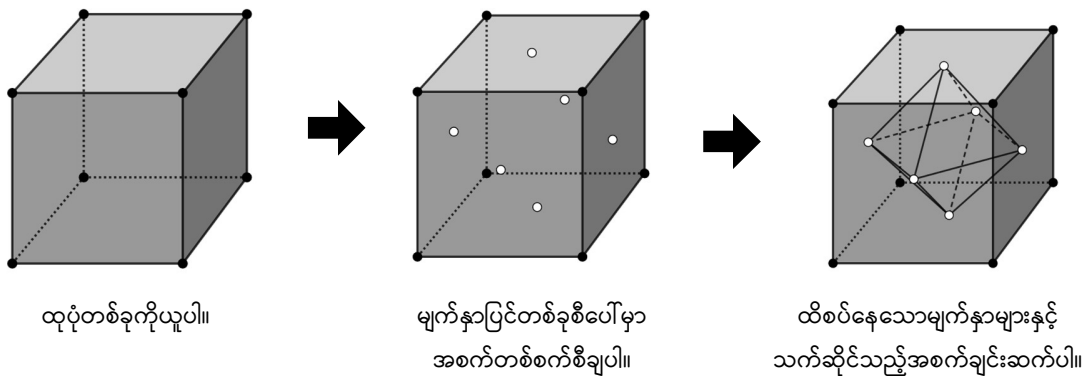
ဇယား 4 - V, E နဲ့ F တန်ဖိုးဇယား

ဇယား 4 ရဲ့နောက်ဆုံးပုံနှစ်ပုံမှာ F ကိုသိတာနဲ့တင် V နဲ့ E ကို ပုံထဲမှာသဲကြီးမဲကြီး လိုက်မရဘဲနဲ့ အေးအေးဆေးဆေးလေးတွက်ထုတ်လို့ရပါတယ်။ သွေးပူလေ့ကျင့်ခန်းအနေနဲ့ တွက်ကြည့်ပါ။

သွေးပူလေ့ကျင့်ခန်းပြီးရင်တော့ ဇယားကိုတစ်ချက်ပြန်ကြည့်ပြီး ထူးခြားချက်တွေရှာကြည့်ပါ။ အသိသာဆုံးထူးခြားချက်ကတော့ ဒုတိယပုံနဲ့ တတိယပုံမှာ E ချင်းတူပြီး V နဲ့ F က အထက်အောက်နေရာလဲထားသလိုဖြစ်နေတာပါ။ စတုတ္ထပုံနဲ့ နောက်ဆုံးပုံမှာလည်း အဲ့အတိုင်းပါပဲ။ ဒီကိစ္စလေးကို အရင်ရှင်းပြချင်ပါတယ်။ ဘယ်ထုပုံမဆို သူ့ရဲ့မိတ်ဖက်ထုပုံကို အောက်ပါအတိုင်းတည်ဆောက်လို့ရပါတယ်။

- ထုပုံရဲ့မျက်နှာပြင်တစ်ခုစီပေါ်မှာ အစက်တစ်စက်စီလိုက်ချလိုက်ပါ။
- အချင်းချင်းထိစပ်နေတဲ့ မျက်နှာပြင်နှစ်ခုရဲ့ သက်ဆိုင်ရာအစက်နှစ်စက်ကို အဖြောင့်အတိုင်းဆက်ပါ။

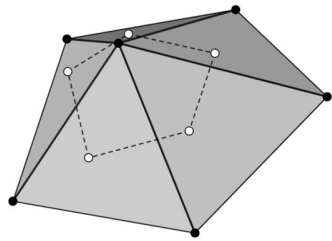
ဒါဆိုရင် ထုပုံနောက်တစ်ခုရလာပါလိမ့်မယ်။ ဇယား 4 ထဲမှာ ဒုတိယပုံနဲ့တတိယပုံက တစ်ခုနဲ့တစ်ခုအပြန်အလှန် မိတ်ဖက်တွေဖြစ်ကြပါတယ် (ပုံ X.5 ကိုကြည့်ပါ)။



ပုံ 5 - ကုဗတုံးရဲ့မိတ်ဖက်ကို တည်ဆောက်ပုံ

ဒီလိုပဲ ဇယား 4 ရဲ့ နောက်ဆုံးနှစ်ပုံကလည်း တစ်ခုနဲ့တစ်ခုအပြန်အလှန်မိတ်ဖက်တွေ ဖြစ်ကြပါတယ်။ ဇယားရဲ့ ပထမဆုံးပုံဖြစ်တဲ့ လေးမျက်နှာထုကတော့ ကိုယ့်မိတ်ဖက်ဟာ ကိုယ်ကိုယ်တိုင်ပြန်ဖြစ်နေတဲ့ Forever alone ထုပ်ပုံပါ။

ထုပ်တစ်ခု S ရဲ့မိတ်ဖက်ဟာ S^* ဆိုပါစို့။ ဒါဆိုရင် မိတ်ဖက်တည်ဆောက်ပုံအရ S ရဲ့မျက်နှာပြင်အရေအတွက်ဟာ S^* ရဲ့ထိပ်စွန်းမှတ်အရေအတွက်နဲ့တူပြီး S နဲ့ S^* တို့ဟာ အနားစောင်းအရေအတွက်ချင်းတူညီကြပါတယ်။ S ရဲ့ထိပ်စွန်းမှတ်အရေအတွက်ဟာ S^* ရဲ့ မျက်နှာပြင်အရေအတွက်နဲ့ တူညီတယ်ဆိုတာကိုတော့ အောက်ကပုံကိုကြည့်ပြီး ဟုတ်မဟုတ်နည်းနည်းစဉ်းစားကြည့်လိုက်ပါ။



ပုံ 6 - S ရဲ့ထိပ်စွန်းမှတ်တစ်ခုနဲ့ S^* ရဲ့မျက်နှာပြင်တစ်ခု တွဲစပ်ပုံ

ဒီအကြောင်းကြောင့်ဇယား 3 မှာ V, E, F တန်ဖိုးတွေက crossing သွားတူနေတာဖြစ်ပါတယ်။ နောက်ထပ် ထူးခြားချက်တွေ ရှာကြည့်ရအောင်။ ဇယား 4 ကိုပြန်ကြည့်ပြီး $V + F$ ရဲ့ တန်ဖိုးတွေကို လိုက်တွက်ကြည့်ပါ။ သိပ်မသိသာတဲ့ ဒုတိယထူးခြားချက် တွေပါလိမ့်မယ်။

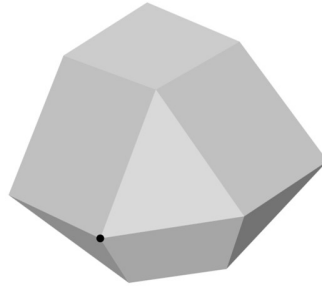
ထူးခြားချက်ကတော့ $V + F$ ရဲ့တန်ဖိုးဟာ E ထက်အမြဲတမ်း 2 ကြီးနေတာပါ။ ဒါကိုညီမျှခြင်းနဲ့ လှအောင်ပြန်စီရေးရင်တော့

$$V - E + F = 2$$

ပေါ့။ ဒီထူးခြားချက်ဟာ အဘက်ဘက်ကခေါက်ချိုးညီတဲ့ပုံတွေမှမကပါဘူး။ ထုပ်အားလုံးနီးနီးအတွက်မှန်ပါတယ်။ ပုံ X.3 ကထုပ်တွေမှာ နောက်ဆုံးပုံကလွဲရင် $V - E + F = 2$ ဖြစ်နေပြီး နောက်ဆုံးပုံမှာတော့ $V - E + F = 0$ ဖြစ်နေတာတွေ့ရမှာပါ (တကယ်တွက်ကြည့်ပါ)။ ဒီနောက်ဆုံးပုံက ထူးခြားချက်ဖြစ်နေတာသည် ထုပ်မှာလက်လျှိုသွင်းလို့ရတဲ့ အပေါက်ပါနေတာမို့လို့ပါ။

Polyhedron တိုင်းအတွက် $V - E + F = 2$ ဖြစ်ကြောင်းက မြင်သွားရင်တကယ်ရှင်းရှင်းလေးပါ။ Polyhedron တစ်ခုကိုယူပြီး ထိပ်စွန်းမှတ်နဲ့ အနားစောင်းတွေအားလုံးကို မျက်စိထဲခဏဖျောက်ထားပါ။ အဲ့တော့ polyhedron ကြီးက

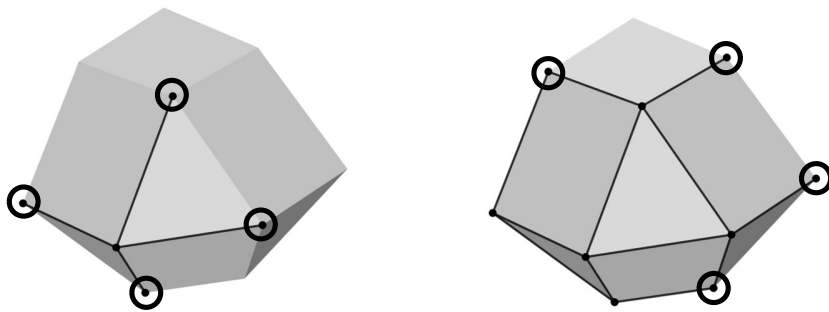
လုံးချောကြီးဖြစ်နေမှာပေါ့။ ဒီဖျောက်ထားတဲ့ ထိပ်စွန်းမှတ်နဲ့ အနားစောင်းတွေကို တစ်ခုချင်းပြန်ဆွဲပါမယ်။ အရင်ဆုံး နှစ်သက်ရာထိပ်စွန်းမှတ်တစ်ခုကို ထည့်ဆွဲလိုက်ပါ။



ပုံ 7 - ပထမအဆင့် : ထိပ်စွန်းမှတ်တစ်ခုဆွဲပါ

အဓိက idea ကတော့ ဖျောက်ထားတာတွေကိုပြန်ထည့်တဲ့ လုပ်ငန်းစဉ်တလျောက်မှာ $V - E + F$ ရဲ့တန်ဖိုးကို တောက်လျောက်တွက်နေဖို့ပါပဲ။ ဒီနေရာမှာ V နဲ့ E ဟာ ပြန်ထည့်ဆွဲပြီးဖြစ်တဲ့ ထိပ်စွန်းမှတ်နဲ့ အနားစောင်းအရေအတွက် အသီးသီးကိုဆိုလိုပြီး F ကတော့ အနားစောင်းတွေနဲ့ပိုင်းခြားခြင်းမခံရဘဲ တစ်ဆက်တည်းရှိနေတဲ့ မျက်နှာပြင်အရေအတွက် ဖြစ်ပါတယ်။ ပထမအဆင့်ပြီးတဲ့အချိန်မှာ $V = 1, E = 0, F = 1$ ဖြစ်တဲ့အတွက် $V - E + F = 2$ ဖြစ်နေပါတယ်။

ဒုတိယအဆင့်၊ တတိယအဆင့်တွေကတော့ ပုံစံတူပဲသွားပါမယ်။ အဆင့်တစ်ဆင့်စီမှာ လက်ရှိထည့်ထားတဲ့ ထိပ်စွန်းမှတ်တွေနဲ့ ထိနေတဲ့အနားစောင်းတွေကို **တစ်ခုချင်း**ထည့်ဆွဲရမှာပါ။ ဒီနေရာမှာ အသစ်ဆွဲလိုက်တဲ့အနားစောင်းရဲ့ အစွန်တစ်ဖက်က မဆွဲရသေးတဲ့ထိပ်စွန်းမှတ်ဖြစ်နေရင် သူ့ကိုပါထည့်ဆွဲ လိုက်ပါမယ်။ အောက်ပါပုံ 8 မှာဒုတိယအဆင့်နဲ့ တတိယအဆင့်ကို မြင်နိုင်ပါတယ်။ အဆင့်အလိုက် အသစ်ထည့်လိုက်တဲ့ထိပ်စွန်းမှတ်တွေကို ဝိုင်းပြထားပါတယ်။



ပုံ 8 - ဒုတိယနဲ့ တတိယအဆင့်

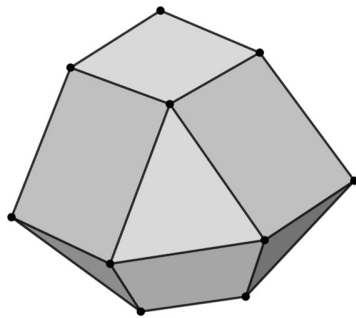
အဆင့်တစ်ဆင့်စီမှာ အနားစောင်းတွေအများကြီးဆွဲတယ်ဆိုပေမယ့် **ဒီအနားစောင်းတွေကို တစ်ခုချင်းဆွဲတယ်** ဆိုတာ အရေးကြီးပါတယ်။ အနားစောင်းအသစ်တစ်ခုဆွဲတဲ့အခါမှာ ဆွဲတဲ့ပုံစံနှစ်မျိုးပဲဖြစ်နိုင်ပါတယ်။

- ထိပ်စွန်းမှတ်အသစ်ထပ်ထည့်ရတဲ့ အနားစောင်း
- ဆွဲထားပြီးသားထိပ်စွန်းမှတ်နှစ်ခုကို ဆက်သွယ်တဲ့အနားစောင်း

ထိပ်စွန်းမှတ်အသစ်ထပ်ထည့်ရတဲ့ အနားစောင်းတစ်ခုဆွဲလိုက်တိုင်း V က $+1$ တိုး၊ E ကလည်း $+1$ တိုးပြီးတော့ F ကပြောင်းလဲမှုမရှိပါ။ ဒါကြောင့် $V - E + F$ ရဲ့တန်ဖိုးကဒီအနားစောင်းကို မဆွဲခင်နဲ့ဆွဲပြီးအခြေအနေနှစ်ခုမှာ အတူတူပဲဖြစ်နေမှာပါ။

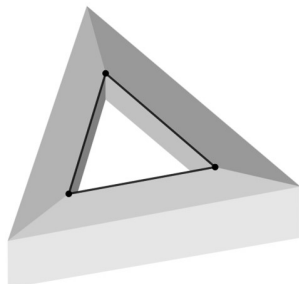
ဒီလိုပဲဆွဲပြီးသားထိပ်စွန်းမှတ်နှစ်ခုကို ဆက်သွယ်တဲ့အနားစောင်းတစ်ခုဆွဲလိုက်တိုင်း V ကပြောင်းလဲမှုမရှိ၊ E က $+1$ တိုးပြီးတော့ F ကလည်း $+1$ တိုးသွားမှာပါ။ ဒါကြောင့် အနားစောင်းကိုမဆွဲခင်နဲ့ ဆွဲအပြီးမှာ $V - E + F$ ရဲ့တန်ဖိုးက ပြောင်းလဲမှုမရှိပါ။

ပထမအဆင့်အပြီးမှာ $V - E + F = 2$ ဖြစ်ပြီး အနားစောင်းတစ်ခုထည့်လိုက်တိုင်း $V - E + F$ တန်ဖိုးက မပြောင်းတဲ့အတွက် ထည့်စရာတွေအကုန်ထည့်ပြီးချိန်မှာလည်း $V - E + F = 2$ ပဲဖြစ်ရပါမယ်။ ဒါဆိုသက်သေပြချက် ပြီးပါပြီ။ ဘယ်လောက်လှလိုက်တဲ့ သက်သေပြချက်လဲ။ စိတ်ထဲမှာမြင်သာပေမယ့် သက်သေပြရခက်တဲ့ detail အချို့ကိုတော့ ကျွန်တော်ကျော်ချထားပါတယ်။



ပုံ 9 - ပုံတစ်ပုံလုံးဆွဲပြီးချိန်မှာလည်း $V - E + F = 2$ ပဲ

လက်လျှိုသွင်းလို့ရတဲ့ အပေါက်ပါတဲ့ ထုပုံတွေမှာတော့ ဒီသက်သေပြချက်ဟာ အလုပ်မဖြစ်ပါဘူး။ ဆွဲပြီးသား ထိပ်စွန်းမှတ်နှစ်ခုကိုဆက်တဲ့ အနားစောင်းကိုထည့်လိုက်ပေမယ့်လည်း F က $+1$ တိုးချင်မှတိုးမှာပါ။ အောက်ကပုံကိုကြည့်ရင် ရှင်းသွားပါလိမ့်မယ်။



ပုံ 10 - အပေါက်ပါတဲ့ထုပုံတွေမှာ အနားစောင်းပတ်လမ်းအချို့က F ကို $+1$ မတိုးစေဘူး

ဒါပေမယ့်လည်း လက်လျှိုသွင်းလို့ရတဲ့အပေါက် g ပေါက်ပါတဲ့ပုံတိုင်းမှာ $V - E + F = 2 - 2g$ ဖြစ်ပါတယ်။ သက်သေပြချက်ကတော့ polyhedron တိုင်းအတွက် $V - E + F = 2$ ဖြစ်တယ်ဆိုတာကိုသုံးပြီးပြလို့ရပါတယ်။ ဒီစာအုပ်မှာထည့်မပြောတော့ပါဘူး။

ကဲ... ဆောင်းပါးအစမှာပြောခဲ့တဲ့ အဘက်ဘက်ကခေါက်ချိုးညီတဲ့ polyhedron ငါးခုပဲရှိတယ်ဆိုတာကို ပြဖို့အတွက် လုံလောက်တဲ့ပစ္စည်းကိရိယာရပါပြီ။ စလိုက်ရအောင်။ မျက်နှာပြင်အားလုံးဟာ ဥသည့် n -gon တွေဖြစ်နေပြီး ထိပ်စွန်းမှတ်တိုင်းကို မျက်နှာပြင် k ခုလာထိနေတဲ့ အဘက်ဘက်ကခေါက်ချိုးညီ polyhedron တစ်လုံးကိုယူလိုက်ပါ။ ဒါဆိုရင် V နဲ့ E ကို in terms of F နဲ့တွက်ယူလို့ရပါတယ် (သွေးပူလေ့ကျင့်ခန်းလုပ်ခဲ့ရင် တွက်တတ်ပါလိမ့်မယ်)။ တွက်ပြရရင်တော့ E ကိုရေဖို့အတွက် မျက်နှာပြင်တစ်ခုစီမှာ သူနဲ့ထိနေတဲ့အနားစောင်း n ခုရှိတယ်။ မျက်နှာပြင်က F ခုဆိုတော့ အနားစောင်းနဲ့ မျက်နှာပြင်ထိစပ်မှုအရေအတွက်က nF ခုရှိမယ်။ ဒါပေမယ့် အနားစောင်းတိုင်းက မျက်နှာပြင်နှစ်ခုနဲ့ထိနေလို့ nF ဆိုတာ အနားစောင်းအရေအတွက်ရဲ့ နှစ်ဆဖြစ်နေတယ်။ ဒါကြောင့် $E = nF/2$ ဆိုတာကိုရပါတယ်။ ဒီအတိုင်းပဲ V အတွက်စဉ်းစားကြည့်ရင် ထိပ်စွန်းမှတ်တိုင်းက မျက်နှာပြင် k ခုမှာပါနေလို့ $V = nF/k$ ကိုရပါမယ်။ ဒါကြောင့်

$$\frac{nF}{k} - \frac{nF}{2} + F = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{n}{k} - \frac{n}{2} + 1 = \frac{2}{F}$$

ဖြစ်ပါတယ်။ ဒီကနေ

$$\frac{n}{k} - \frac{n}{2} + 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{k} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2}$$

ကိုရမှာပါ။ ဒါကြောင့် n နဲ့ k က သိပ်ကြီးသွားလို့မရပါဘူး။ တိတိကျကျပြောရင်တော့ $n \geq 6$ ဖြစ်သွားရင်

$$\frac{1}{k} > \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

ဖြစ်လို့ $k < 3$ ဖြစ်သွားပါမယ်။ ဒါပေမယ့် k ရဲ့အဓိပ္ပါယ်သတ်မှတ်ချက်အရဒါဟာမဖြစ်နိုင်ပါဘူး။ ဒါကြောင့် $n < 6$ ဖြစ်ကိုဖြစ်ရပါမယ်။ ဒီအတိုင်းပဲစဉ်းစားရင် $k < 6$ ဖြစ်ရမယ်ဆိုတာရပါတယ်။ ဒါကြောင့် ဖြစ်နိုင်ချေအနည်းငယ်ပဲ ကျန်ပါတော့တယ်။

	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$
$n = 3$	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)
$n = 4$	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)
$n = 5$	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)

ဒီထဲကမှ မီးခိုးရောင်ပြထားတဲ့အတွဲတွေက $\frac{1}{n} + \frac{1}{k} > \frac{1}{2}$ ကိုမပြေလည်ပါဘူး။ ဒါကြောင့်ဖြစ်နိုင်ချေ ငါးခုပဲကျန်ခဲ့ပါတယ်။
ဒီငါးခုကရတဲ့ (n, k) တွေဟာ ပုံ 1 မှာပါတဲ့ polyhedron တစ်ခုစီကို ကိုယ်စားပြုပါတယ်။ ဒါကြောင့် အဘက်ဘက်က
ခေါက်ချိုးညီတဲ့ polyhedron ကငါးခုပဲရှိတာဖြစ်ပါတယ်။