အနန္တထက်ပိုကြီးတဲ့ အနန္တ

သုညနဲ့တစ်ကြားက ကိန်းစစ်အရေအတွက်နဲ့ တစ်နဲ့သုံးကြားက ကိန်းစစ်အရေအတွက် ဘယ်ဟာပိုများသလဲ။

အရေအတွက်နှစ်ခုကို နှိုင်းယှဉ်တယ်ဆိုတာ မူလတန်းတည်းကလုပ်တတ်ခဲ့တဲ့အရာပါ။ ဒီခြင်းထဲက ပန်းသီးအရေအတွက်နဲ့ ဟိုခြင်းထဲကပန်းပွင့်အရေအတွက် ဘယ်ဟာပိုများသလဲဆိုတဲ့ မေးခွန်းမျိုးတွေက လူတိုင်း ဖြေတတ်ကြပါတယ်။ ဒါပေမယ့် ဒီ 'အရေအတွက်' ဆိုတဲ့စကားလုံးဟာ မရေမတွက်နိုင်တဲ့အရာတွေအတွက် အဓိပ္ပါယ် မရှိတော့ပါဘူး။ ဥပမာ စုံကိန်းအားလုံးရဲ့အရေအတွက်၊ တစ်နဲ့သုညကြားက ကိန်းစစ်အရေအတွက်၊ ကိန်းစစ်အားလုံးအစု $\mathbb{R}$ ရဲ့ အစုပိုင်းအရေအတွက် စတာတွေအားလုံးမှာ 'အရေအတွက်' ဆိုတာအဓိပ္ပါယ်မရှိပါဘူး။ ကတ်သတ်ဖြေရင် အရေအတွက် 'အနန္တ' လို့ဖြေလို့တော့ရတာပေါ့။ ဒါပေမယ့်အခုလိုမျိုး "အဓိပ္ပါယ်မရှိလို့ ဆွေးနွေးစရာအကြောင်းမရှိဘူး" လို့ဖင်ပိတ်ငြင်းမယ့် အစား "အဓိပ္ပါယ်ရှိလာအောင် လုပ်လို့ရသလား" လို့ မေးခွန်းဖွင့်ပြီး မေးကြည့်ရအောင်။

အနန္တအစု (Infinite set) တွေအတွက် 'အရေအတွက်' ဆိုတာကိုသတ်မှတ်ရ အလွန်ခက်ပါတယ်။ ဒါပေမယ့် 'အရေအတွက် တူတယ်' ဆိုတာကတော့ intuitive ဖြစ်တဲ့အဓိပ္ပါယ်သတ်မှတ်ချက် ပေးလို့ရပါတယ်။ Infinite set တွေမှာ အရေအတွက်တူတဲ့အကြောင်းပြောဖို့ 'ရေတွက်ခြင်း' ပါဝင်လို့မရပါဘူး။ ဒါဆိုရင် 'ရေတွက်ခြင်း' မပါဘဲနဲ့ 'အရေအတွက် တူတယ်' ဆိုတာကို ဘယ်လိုမြင်လို့ရမလဲ။ ဒီမေးခွန်းကို infinite set တွေအတွက်မဖြေခင် finite set တွေအတွက် အရင်ဖြေကြည့်ရအောင်။

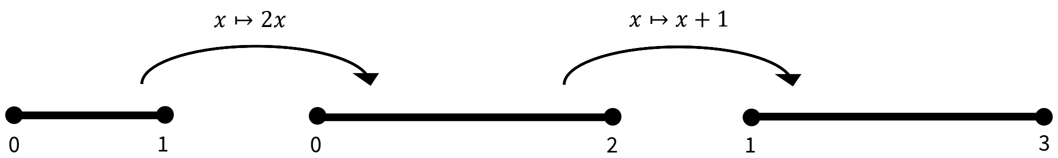
လူတစ်ယောက်ရဲ့ ဘယ်ဘက်လက်မှာရှိတဲ့ လက်ချောင်းအရေအတွက်နဲ့ ညာဘက်လက်မှာရှိတဲ့ လက်ချောင်းအရေအတွက်က တူပါတယ်။ ဒါကိုမရေတွက်ဘဲ ဘယ်လိုသိနိုင်မလဲ။ ရှင်းပါတယ်။ လက်မကို လက်မနဲ့၊ လက်ညိုးကို လက်ညိုးနဲ့၊ လက်သန်းကို လက်သန်းနဲ့ စသည်ဖြင့်တွဲလို့ရနေတာကိုး။ သင်္ချာလိုပြောရင်တော့ အကယ်၍ finite set နှစ်ခု A နဲ့ B ကြားမှာ one-to-one correspondence တစ်ခုတည်ဆောက်လို့ရမယ်ဆိုရင် အစု A နဲ့ B ဟာအရေအတွက် တူပါတယ်။ ဒီအိုင်ဒီယာကိုပဲ infinite set တွေအထိဆွဲသွားလို့ရပါတယ်။ အစုနှစ်ခု (finite or infinite) A နဲ့ B ကြားမှာ one-to-one correspondence တည်ဆောက်လို့ရခဲ့မယ်ဆိုရင် အစု A နဲ့ B ကို 'အရေအတွက်တူတယ်' လို့ခေါ်ကြရအောင်။ သင်္ကေတအားဖြင့် $A \sim B$ လို့ရေးပါမယ်။

ရှေ့ဆက်မသွားခင် ဥပမာတွေအများကြီးကြည့်ဖို့လိုပါတယ်။ ဒီအဓိပ္ပါယ်သတ်မှတ်ချက်က ထင်သလောက် intuitive မဖြစ်ပါဘူး။

ဥပမာ 1 ။ ။ $A = \{1, 2, 3, \dots\}$ က အပေါင်းကိန်းပြည့်အားလုံးအစုဖြစ်ပြီး $B = \{2, 4, 6, \dots\}$ က အပေါင်းစုံကိန်းအားလုံးရဲ့ အစုဖြစ်တယ်ဆိုပါစို့။ ဒါဆိုရင် $f : A \to B$ ဆိုတဲ့ဖန်ရှင်ကို $f(x) = 2x$ လို့တည်ဆောက်လိုက်ရအောင်။ ဒါဆိုရင် f ဟာ one-to-one correspondence ဖြစ်ပါတယ်။ ဒါကြောင့် A နဲ့ B ဟာအရေအတွက်တူပါတယ်။ $A \sim B$ ဖြစ်ပါတယ်။

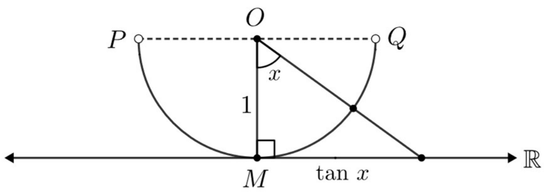
$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & \dots \end{array}$$

ဥပမာ 2 ။ ။ $A = [0, 1]$ က 0 မှ 1 အထိကိန်းစစ်အားလုံးရဲ့အစုဖြစ်ပြီး $B = [1, 3]$ က 1 မှ 3 အထိကိန်းစစ်အားလုံးရဲ့ အစုဖြစ်ပါစေ။ ဒါဆိုရင် $f : A \to B$ ဆိုတဲ့ဖန်ရှင်ကို $f(x) = 2x + 1$ လို့တည်ဆောက်လိုက်ရအောင် (ပုံအားဖြင့် $[0, 1]$ ကိုနှစ်ဆဆွဲဆန့်ပြီး ရှေ့ကို 1 တိုးတယ်လို့မြင်ပါ)။ ဒီလိုဆို f ဟာ one-to-one correspondence ဖြစ်ပါတယ်။ ဒါကြောင့်ပဲ $A \sim B$ ဖြစ်ပါတယ်။ ဒီအတိုင်းပဲ စမှတ်နဲ့ ဆုံးမှတ်မတူတဲ့ closed interval နှစ်ခုဟာအမြဲတစေ အရေအတွက်တူညီကြောင်း သက်သေပြလို့ရပါတယ်။



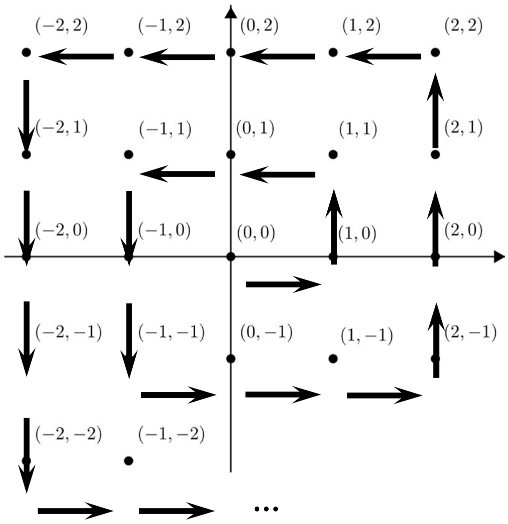
ပုံ 1 - $f(x) = 2x + 1$ ကိုပုံနဲ့မြင်ကြည့်ခြင်း

ဥပမာ 3 ။ ။ $A = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ က $-\frac{\pi}{2}$ နဲ့ $\frac{\pi}{2}$ ကြားကကိန်းစစ်အားလုံးရဲ့အစုဖြစ်ပြီး $\mathbb{R}$ က ကိန်းစစ်အားလုံးရဲ့ အစုဖြစ်ပါစေ။ ဒါဆိုရင် $f : A \to \mathbb{R}$ ဆိုတဲ့ဖန်ရှင်ကို $f(x) = \tan x$ လို့တည်ဆောက်လိုက်ရင် f ဟာ one-to-one correspondence ဖြစ်တဲ့အတွက်ကြောင့် $A \sim \mathbb{R}$ ဖြစ်ပါတယ်။ ဒါကိုပုံ 2 နဲ့လှလှပပမြင်လို့ရပါတယ်။ ကိန်းစစ်မျဉ်း $\mathbb{R}$ ရဲ့ သုညမှတ် M မှာ သူ့ကိုတန်းဂျင့် ထိနေတဲ့ အချင်းဝက် 1 ယူနစ်ရှိ၊ O ဗဟိုရှိတဲ့ စက်ဝိုင်းကိုဆွဲလိုက်ပါ။ PQ ဟာ $\mathbb{R}$ နဲ့ပြိုင်တဲ့ အချင်းမျဉ်းဖြစ်ပါစေ။ ဒါဆိုရင် $f(x) = \tan x$ ဆိုတာသည် လက်တံ OM ပါတဲ့ထောင့်တွေနဲ့ $\mathbb{R}$ ပေါ်ကအမှတ်တွေကို bijection ချပေးနေတာပဲ ဆိုတာကို မြင်နိုင်ပါတယ်။ ပုံကိုတစိမ့်စိမ့်ကြည့်ရင်း တွေးကြည့်ပါ။



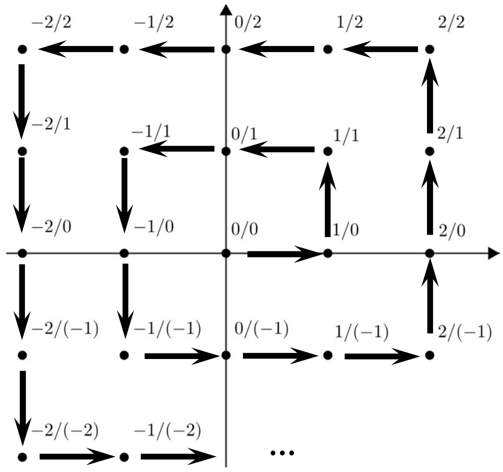
ပုံ 2 - $f(x) = \tan x$ ကိုပုံနဲ့မြင်ကြည့်ခြင်း

ဥပမာ 4 ။ ။ $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ က အပေါင်းကိန်းပြည့်တွေအားလုံးရဲ့ အစုဖြစ်ပြီး $B = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ က ကိန်းပြည့်နှစ်ခုတွဲ (x, y) တွေအားလုံးရဲ့အစုဖြစ်ပါစေ။ ဒါဆို $f : \mathbb{N} \to B$ ကိုပုံ X.3 ထဲကအတိုင်း တည်ဆောက်ပါမယ်။ $(0, 0)$ ကစလို့ ကိန်းပြည့်နှစ်လုံးအတွဲတွေအားလုံးကို ခရုပတ်ခွေကြီးတစ်လျှောက် လက်တွဲခေါ်သွားပါ။ ဒီလက်တွဲတန်းကြီးရဲ့အစ $(0, 0)$ ကို $f(1)$ လို့ထားပါမယ်၊ ဒုတိယကောင် $(1, 0)$ ကို $f(2)$ လို့ထားပါမယ်၊ တတိယကောင် $(1, 1)$ ကို $f(3)$ လို့ထားပါမယ်။ ဒီအတိုင်းထားသွားမယ်ဆိုရင် $f : \mathbb{N} \to B$ ဆိုတဲ့ one-to-one correspondence ကို တည်ဆောက်လို့ရသွားမှာပါ။ ဒါကြောင့် $\mathbb{N} \sim B$ ဖြစ်ပါတယ်။



ပုံ 3 - $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ကို ခရုပတ်ပုံလက်တွဲတန်းကြီးအဖြစ် မြင်ကြည့်ခြင်း

ဥပမာ 5 ။ ။ $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ က အပေါင်းကိန်းပြည့်အားလုံးရဲ့အစုဖြစ်ပြီး $\mathbb{Q}$ က ရာရှင်နယ်ကိန်းအားလုံးရဲ့အစု ဖြစ်ပါစေ။ $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ ကိုအောက်ပါအတိုင်းတည်ဆောက်ပါမယ်။ ပုံ X.4 ကိုကြည့်ပါ။ ဥပမာ 4 ထဲကအတိုင်း $\mathbb{Q}$ ထဲကရာရှင်နယ်ကိန်းတွေကို ပိုင်းဝေနဲ့ ပိုင်းခြေတွဲထားတဲ့ ကိန်းပြည့်နှစ်လုံးတွဲလေးတွေလို့ မြင်လိုက်ပါ။ တစ်နည်းအားဖြင့် (x, y) ဆိုတဲ့အမှတ်ကို x/y ဆိုတဲ့ ရာရှင်နယ်ကိန်းအဖြစ်ပြောင်းမြင်လိုက်ပါ။ ဒါဆိုရင် ဥပမာ 4 မှာအတိုင်း ခရုပတ်ခွေဆွဲသွားပြီး ပြန်ထပ်နေတဲ့ အပိုင်းကိန်းတွေရယ်၊ အဓိပ္ပါယ်မရှိတဲ့အပိုင်းကိန်းတွေရယ် (ဥပမာ 5/0) တွေကိုကျော်သွားရုံပါပဲ။ ရလာတဲ့အစီအစဉ်ရဲ့ ရှေ့ဆုံးကိန်းကို $f(1)$၊ ဒုတိယကို $f(2)$ အစရှိသဖြင့်ထားသွားရင် $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ ဆိုတဲ့ one-to-one correspondence ကိုရပါမယ်။ ဒါကြောင့် $\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$ ဖြစ်ပါတယ်။



ပုံ 4 - $\mathbb{Q}$ ကို ခရုပတ်ပုံလက်တွဲတန်းကြီးအဖြစ် မြင်ကြည့်ခြင်း

ဥပမာ 6 ။ ။ $\mathcal{C}$ ဟာပြင်ညီပေါ်မှာဆွဲနိုင်တဲ့ စက်ဝိုင်းအားလုံးရဲ့အစုဖြစ်ပါစေ။ $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$ ဟာ ကိန်းစစ်သုံးလုံးတွဲ (x, y, z) မှာ $z > 0$ ဖြစ်တဲ့အတွဲအားလုံးရဲ့ အစုဖြစ်ပါစေ။ $f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$ ကိုအခုလိုတည်ဆောက်ပါမယ်။ အရင်ဆုံးပြင်ညီပေါ်မှာ ဝင်ရိုးနှစ်ကြောင်းချလိုက်ပြီး ပြင်ညီပေါ်ကအမှတ်တွေကို (x, y) coordinate တွေနဲ့ပြင်ရေးလိုက်ပါ။ ဗဟို (x, y) နဲ့ အချင်းဝက် r ရှိတဲ့ စက်ဝိုင်းတစ်ခု Ω အတွက် $f(\Omega) = (x, y, r)$ လို့ထားလိုက်ပါ။ ဒါဆိုရင် f ဟာ one-to-one correspondence ဖြစ်တဲ့အတွက်ကြောင့် $\mathcal{C} \sim \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$ ဖြစ်ပါတယ်။

အခုဥပမာတွေကြည့်သလောက်တော့ f ကိုကြံဖန်သတ်မှတ်ပြီးတော့ အစုနှစ်ခုအရေအတွက်တူကြောင်း လျှောက်ပြနေတာကိုတွေ့မှာပါ။ ဒါဆိုရင် အရေအတွက်မတူတဲ့ အစုနှစ်ခုရောရှိပါသေးရဲ့လား။ ခပ်ပေါ့ပေါ့ counter example ပေးရရင် $\{1, 2\}$ ဆိုတဲ့အစုနဲ့ $\mathbb{R}$ ကြားမှာ one-to-one correspondence မရှိတဲ့အတွက် $\{1, 2\} \nsim \mathbb{R}$ ပါ။ ဒါပေမယ့် ဒီဥပမာက ပျင်းဖို့ကောင်း ပါတယ်။ Infinite set နှစ်ခု A နဲ့ B မှာ $A \nsim B$ ဖြစ်တဲ့အခြေအနေရှိနိုင်သလား။ တစ်နည်းအားဖြင့် ကြားထဲမှာ one-to-one correspondence ဘယ်လိုမှတည်ဆောက်ဖို့မဖြစ်နိုင်တဲ့ infinite set နှစ်ခုရှိသလား။ ဒီမေးခွန်းရဲ့အဖြေကတော့ တကယ့်ကို နာမည်ကြီးမှ နာမည်ကြီးပါ။ အခုကြည့်ရမယ့် သက်သေပြချက်က 1891 မှာ George Cantor ကနေ $(0, 1)$ ဆိုတဲ့ 0 နဲ့ 1 ကြားကကိန်းစစ်များအစုနဲ့ $\mathbb{N}$ ဆိုတဲ့ အပေါင်းကိန်းပြည့်များအစုဟာ အရေအတွက်မတူကြောင်းပြခဲ့တဲ့ proof ပါ။ အလွန်ကို နာမည်ကြီးတဲ့ အကွက်ပါ။

Theorem. There is no one-to-one correspondence between $\mathbb{N}$ and $(0,1) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$.

Proof. အကယ်၍ $\mathbb{N}$ နဲ့ $(0, 1)$ ကြားမှာ one-to-one correspondence $f : \mathbb{N} \to (0, 1)$ ရှိခဲ့မယ်ဆိုပါစို့။ ဒါဆိုရင် $f(x)$ ရဲ့တန်ဖိုးတွေအားလုံးဟာ ဒသမကိန်းတွေဖြစ်လိမ့်မယ်။ မည်သည့်ဒသမကိန်းကိုမဆို အခြေ 10 စနစ်မှာ 999 … နဲ့မဆုံးအောင်

ရေးနိုင်တဲ့နည်း တစ်နည်းပဲရှိပါတယ်။ ဥပမာ 0.3 ကို 0.2999 … လို့ရေးမယ့်အစား 0.3000 … လို့ရေးပါမယ်။ ဒီနည်းအတိုင်း $f(1), f(2), f(3), \ldots$ ကို ဒေါင်လိုက်အစဉ်အတိုင်းချရေးသွားပါ။ အောက်မှာဥပမာရေးပြထားပါတယ်။

$$\begin{array}{lcccccccc} f(1) = & 0\,. & \boxed{3} & 1 & 4 & 1 & 5 & \ldots \\ f(2) = & 0\,. & 7 & \boxed{5} & 7 & 5 & 7 & \ldots \\ f(3) = & 0\,. & 4 & 2 & \boxed{0} & 6 & 9 & \ldots \\ \quad\ldots & & & \ldots & & & & \end{array}$$

ပြီးတဲ့အခါ ထူးထူးဆန်းဆန်းဒသမကိန်းတစ်လုံး $y = 0.y_1y_2y_3\ldots$ ကိုအောက်ပါအတိုင်းတည်ဆောက်ပါမယ်။ $y_1, y_2, \ldots$ တွေအားလုံးက တစ်လုံးမှ 0 နဲ့ 9 မဟုတ်ပါ။ ပြီးတော့

1. y_1 ကို $f(1)$ ရဲ့ ဒသမပြီးပထမဆုံးကိန်းနဲ့ မတူအောင်ထားမယ်။ (အပေါ်ပုံမှာဆိုရင် $y_1 \neq 3$)
2. y_2 ကို $f(2)$ ရဲ့ ဒသမပြီးဒုတိယကိန်းနဲ့ မတူအောင်ထားမယ်။ (အပေါ်ပုံမှာဆိုရင် $y_2 \neq 5$)
3. y_3 ကို $f(3)$ ရဲ့ ဒသမပြီးတတိယကိန်းနဲ့ မတူအောင်ထားမယ်။ (အပေါ်ပုံမှာဆိုရင် $y_3 \neq 0$)

   …

N. y_N ကို $f(N)$ ရဲ့ ဒသမပြီး N ကြိမ်မြောက်ကိန်းနဲ့ မတူအောင်ထားမယ်။

   …

ဒီနည်းနဲ့တည်ဆောက်ပြီးရလာတဲ့ y ဟာ $f(1)$ နဲ့မတူပါဘူး။ ဘာကြောင့်လဲဆိုတော့ ပထမနေရာချင်းမှမတူတာ။ အဲ့လိုပဲ ဒုတိယနေရာချင်းမတူလို့ $f(2)$ နဲ့လည်းမတူပါဘူး။ ဒီလိုပဲ တတိယနေရာချင်းမတူလို့ $f(3)$ နဲ့လည်း မတူပြန်ပါဘူး။ ဒီအတိုင်းစဉ်းစားရင် y ဟာ $f(\ldots)$ တွေနဲ့ တစ်ခုမှကိုမတူတာပါ။ ဒါကြောင့် y ဟာဒသမကိန်း ဖြစ်နေသော်ငြား f ရဲ့ range ထဲမှာမရှိတဲ့အတွက် f ဟာ one-to-one correspondence မဖြစ်နိုင်တော့ပါ။ ဒါကြောင့် "အကယ်၍ f ဟာ one-to-one correspondence ဖြစ်ခဲ့ပါက f ဟာ one-to-one correspondence မဖြစ်နိုင်ပါ" ဆိုတဲ့ ရှေ့နောက်မညီတဲ့ အဆိုကြီးထွက်လာပါတယ်။ ဒါကြောင့်ရှေ့ဆုံးယူဆထားတဲ့ $\mathbb{N} \sim (0,1)$ ဖြစ်တယ်ဆိုတဲ့ အချက်ဟာ မှားကိုမှားရပါမယ်။ ■

တစ်နည်းအားဖြင့်တော့ ဒီသီအိုရမ်က 0 နဲ့ 1 ကြားမှာရှိတဲ့ကိန်းစစ်အရေအတွက်ဟာ အပေါင်းကိန်းပြည့် အရေအတွက်ထက် ပိုများတယ်လို့ပြောချင်တာပါပဲ။ ပိုများတယ်ဆိုတာကိုနည်းနည်းလေး တိကျအောင်ပြောကြည့်ရအောင်။ အစု A နဲ့ အစု B ကြားမှာ injective (one-one) function $f : A \to B$ တစ်ခုတည်ဆောက်လို့ရသော်ငြားလည်း one-to-one correspondence မည်သည့်နည်းနှင့်မျှတည်ဆောက်ဖို့မဖြစ်နိုင်လျှင် A ၏အရေအတွက်သည် B အောက်ငယ်သည်၊ တစ်နည်းအားဖြင့် B ၏အရေအတွက်သည် A ထက်များသည်လို့ခေါ်ပြီး၊ သင်္ကေတအားဖြင့် $A \prec B$ လို့ရေးပါမယ်။

$\mathbb{N}$ နဲ့ $(0,1)$ အကြားမှာဆိုရင် $f : \mathbb{N} \to (0,1)$ ကို $f(x) = 1/(1+x)$ လို့သတ်မှတ်ရင် injective ဖြစ်ပါတယ်။ ဒါပေမယ့်အထက်ကပြောခဲ့တဲ့အတိုင်း one-to-one correspondence တည်ဆောက်ဖို့မဖြစ်နိုင်တဲ့အတွက် $\mathbb{N} \prec (0,1)$ ဖြစ်ပါတယ်။ တစ်ခါ $(0,1) \sim \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \sim \mathbb{R}$ ဖြစ်တဲ့အတွက်ကြောင့် $\mathbb{N} \prec \mathbb{R}$ ပေါ့။ ဒီတော့ $\mathbb{R}$ ထက်ပိုကြီးတဲ့ အနန္တတွေ

မရှိတော့ဘူးလားလို့ ဆင့်မေးလို့ရပါသေးတယ်။ အဖြေကတော့ ရှိပါတယ်တဲ့။ ရှိတာမှ အနန္တပေါင်း အနန္တရှိပါတယ်။ ဒါသည်လည်း Cantor ရဲ့နာမည်ကြီးသီအိုရမ်တစ်ခုပါပဲ။

Theorem. **(Cantor's theorem)** Let X be a set and $\mathcal{P}(X)$ be set of all subsets of X. Then, $X \prec \mathcal{P}(X)$.

သက်သေပြချက်ကိုတော့ ဒီစာအုပ်မှာထည့်မရေးတော့ပါဘူး။ ဒါကြောင့် $\mathbb{R}$ ရဲ့အစုပိုင်းအားလုံးအစုဖြစ်တဲ့ $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ ရဲ့အရေအတွက်က $\mathbb{R}$ ထက်ပိုများပါတယ်။ အဲ့လိုပဲ ဒီအစုပိုင်း အားလုံးအစုရဲ့ အစုပိုင်းအားလုံးအစုဖြစ်တဲ့ $\mathcal{P}\big(\mathcal{P}(\mathbb{R})\big)$ က $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ ထက်အရေအတွက်ပိုများပါတယ်။ အဲ့အတိုင်း ဆက်ပြီးစဉ်းစားသွားရင်

$$\mathbb{N} \prec \mathbb{R} \prec \mathcal{P}(\mathbb{R}) \prec \mathcal{P}\big(\mathcal{P}(\mathbb{R})\big) \prec \mathcal{P}\Big(\mathcal{P}\big(\mathcal{P}(\mathbb{R})\big)\Big) \prec \cdots$$

ဆိုပြီး တဖြည်းဖြည်းကြီးထွားလာတဲ့ အနန္တတွေရဲ့ အနန္တကိန်းစဉ်ကြီးကို တည်ဆောက်လို့ရပါတယ်။ စကြဝဠာအနန္တဆိုတာ ဘယ်အနန္တများပါလိမ့်။